инварианты, составленные из неисчезающих $R_{ik,lm}$, исчезают, равны нулю. Такое поведение локальных величин вызывало в прошлом общее недоверие к теории гравитационных волн. В настоящее время стал общепризнанным и общепонятным принцип нелокальности гравитационной волны. Парадоксы разъясняются при рассмотрении волны в области, вмещающей несколько длин волны. Для интересующихся подробностями вопроса рекомендуем наряду с классическим учебником Ландау и Лифшица «Теория поля» и монографиями перечесть главу о гравитационных волнах в ТТ и ЭЗ.

§ 3. Гравитационные волны в теории малых возмущений космологического решения

В гл. 11 была рассмотрена созданная Лифшицем теория эволюции малых возмущений, наложенных на однородное и изотропное (фридмановское) космологическое расширение.

Отмечалась возможность инвариантно классифицировать возмущения, разделяя их на скалярные (включающие возмущение плотности), векторные (вихревые) и тензорные.

Тензорные возмущения определены таким образом, чтобы из возмущения метрики и волнового вектора нельзя было построить ни скаляра, ни вектора. Этому соответствуют условия (16.2.4). Поэтому тензорные возмущения представляют собой гравитационные волны, а на ранней стадии, когда длина волны больше горизонта, тензорные возмущения есть «то, что с течением времени превратится в гравитационную волну». Рассмотрим подробнее законы эволюции тензорных возмущений и особенно этот переход «будущей» волны в «сущую» волну.

Проследим сперва за соотношением между горизонтом и длиной гравитационной волны. Длина горизонта *) порядка ct, длина волны пропорциональна $a(t)$, так что мгновенное значение $\lambda = \lambda_0 a^{-1}(t_0) a(t)$, где $a(t_0)$ и λ_0 относятся к произвольному моменту t_0. Как известно, $a(t)$ растет медленнее, чем t: как $t^{2/3}$ при $P=0$, как $t^{1/2}$ при $P=\varepsilon/3$ и как $t^{1/3}$ при $P=\varepsilon$. Поэтому для каждой волны можно найти t_1 такое, что при $t<t_1$ $\lambda<ct$, но при $t>t_1$ $\lambda>ct$. Например, для $P=\varepsilon/3$ $t_1=\lambda_0^2/ct_0$. Удобнее, однако, пользоваться величинами, выраженными в сопутствующей системе координат x, y, z, и с параметром η, заменяющим время:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - a^2(t)\,[dx^2+dy^2+dz^2] = a^2(\eta)\,[d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2],$$

$$d\eta = \frac{c\,dt}{a(t)}. \qquad (16.3.1)$$

---

*) Радиус мира нас не интересует! В частности, вблизи сингулярности все результаты для замкнутого, открытого и плоского мира одинаковы, так что можно рассматривать плоский мир с бесконечным радиусом, но конечным горизонтом.

В этой системе координат волновой вектор $\varkappa$ постоянен, так же как и сопутствующая длина волны. Определение горизонта здесь очевидно: расстояние до горизонта просто равно η, так как уравнение распространения света в этой системе есть $ds=0$, $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=d\eta$. Таким образом, естественно различаются период $\varkappa\eta<1$ (горизонт меньше приведенной длины волны) и период $\varkappa\eta>1$ (горизонт больше приведенной длины волны). Так как $\varkappa=\mathrm{const}$, а η растет с ростом t, то не подлежит сомнению, что сначала $\varkappa\eta<1$, а потом $\varkappa\eta>1$.

Для слабых гравитационных волн в радиационно-доминированном мире (см. § 5 гл. 11) существуют следующие решения:

$$h_\alpha^\beta=\mathrm{const}\cdot G_\alpha^\beta e^{i\varkappa x+i|\varkappa|\eta}a(\eta), \tag{16.3.2}$$

причем в этом случае $a=\mathrm{const}\cdot\eta$. Решениями являются вещественная и мнимая части этого выражения в отдельности. Из решений такого типа, вместе с комплексно сопряженными, можно построить два линейно независимых решения:

$$\left.\begin{aligned} h_\alpha^\beta&=C_1G_\alpha^\beta\cos(\varkappa x+\varphi_1)\frac{\sin\varkappa\eta}{\varkappa\eta},\\ h_\alpha^\beta&=C_2G_\alpha^\beta\cos(\varkappa x+\varphi_2)\frac{\cos\varkappa\eta}{\varkappa\eta}.\end{aligned}\right\} \tag{16.3.3}$$

Первое решение остается конечным вблизи сингулярности, $\eta\to0$. Следовательно, конечные (или малые) возмущения метрики в сингулярном состоянии, соответствующие $C_1\neq0$ и $C_2=0$, ведут к конечным (или малым) амплитудам гравитационных волн на поздней стадии, при $\varkappa\eta>1$.

Подчеркнем, что говорить о плотности гравитационной энергии на ранней стадии, при $\varkappa\eta<1$, принципиально невозможно.

Выше рассматривалась эволюция отдельной волны. При малой амплитуде возмущений метрики и соответственно малой амплитуде волн принцип суперпозиции имеет место. Поэтому результаты естественно обобщаются и на хаотическую суперпозицию волн. Условие конечности возмущений метрики вблизи сингулярности накладывает определенные ограничения на хаотичность [оно уже учтено в формуле (16.3.3)]. Оказывается, что этим условием отбираются стоячие гравитационные волны. В самом деле, возьмем самую общую линейную комбинацию комплексных решений для волн с данными $|\varkappa|$ и направлением $\pm\frac{\varkappa}{|\varkappa|}$:

$$f=\frac{C_3}{\varkappa\eta}e^{i\varkappa x-i\varkappa\eta}+\frac{C_4}{\varkappa\eta}e^{-i\varkappa x-i\varkappa\eta}+\frac{C_5}{\varkappa\eta}e^{i\varkappa x+i\varkappa\eta}+\frac{C_6}{\varkappa\eta}e^{-i\varkappa x+i\varkappa\eta}. \tag{16.3.4}$$

Условие вещественности этой комбинации даст $C_4=C_5^*$, $C_6=C_3^*$. Записывая $C_3=Ae^{i\varphi}$, $C_6=Ae^{-i\varphi}$, $C_5=Be^{i\psi}$, $C_4=Be^{-i\psi}$ (A, B, φ, ψ —

вещественные), получим

$$f=\frac{A}{\varkappa\eta}\cos(\varkappa x-\varkappa\eta+\varphi)+\frac{B}{\varkappa\eta}\cos(-\varkappa x-\varkappa\eta+\psi), \quad (16.3.5)$$

т. е. имеются две бегущие волны противоположного направления с произвольными неодинаковыми амплитудами. Такое решение вещественно и удовлетворяет уравнению для волн, но вблизи сингулярности его амплитуда (почти везде) бесконечна. Для того чтобы сформулировать условие ограниченности амплитуды f при $\eta\to 0$ преобразуем предыдущую формулу:

$$f=\frac{\cos\varkappa\eta}{\varkappa\eta}[A\cos(\varkappa x+\varphi)+B\cos(\varkappa x-\psi)]+$$
$$+\frac{\sin\varkappa\eta}{\varkappa\eta}[A\sin(\varkappa x+\varphi)-B\sin(\varkappa x-\psi)]. \quad (16.3.6)$$

Ограниченность f требует $B=-A$, $\psi=-\varphi$, и получаем

$$f=2A\frac{\sin\varkappa\eta}{\varkappa\eta}\sin(\varkappa x+\varphi), \quad (16.3.7)$$

т. е. амплитуды двух встречных (бегущих) волн равны и вместе они образуют стоячую волну. Напомним, что такой же вывод получился для акустических волн (скалярных волн с изменением плотности) и привел к предсказанию модуляции амплитуды возмущений плотности после рекомбинации (см. § 6 гл. 10).

§ 4. Ожидаемая интенсивность реликтового коротковолнового гравитационного излучения

Рассмотрим несколько различных вариантов ответа на вопрос об ожидаемой интенсивности коротковолнового гравитационного излучения. Общим для этих вариантов является выбор начального момента, $t=t_g=10^{-43}$ *сек*, когда начинается рассмотрение. Мы уже неоднократно говорили, что t_g является нижней границей применимости современной теории тяготения.

Наиболее простой вариант заключается в предположении, что 1) на момент t_g имеет место термодинамическое равновесие между гравитонами и другими элементарными частицами и античастицами и, к тому же, число сортов различных частиц конечно, а взаимодействие между ними мало (см. § 2 гл. 7).

При температуре выше энергии покоя (Mc^2) всех частиц имеем ультрарелятивистский газ. Этот случай рассматривается аналогично тому, как Пиблс рассмотрел вопрос о реликтовых нейтрино в горячей Вселенной (см. § 1 гл. 7).

Пусть при $T>Mc^2$ плотность энергии всех видов частиц, включая гравитоны, равна $\varepsilon=\varkappa^*\sigma T^4$, где σ — константа для электромаг-