ГЛАВА 18

ПРОСТЕЙШИЕ АНИЗОТРОПНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

§ 1. Ньютоновская теория простейшего анизотропного однородного решения как предельный случай локальной задачи

Выше мы строили космологическое решение в изотропном и однородном случае, начиная с рассмотрения расширения конечного шара. Попытаемся построить анизотропное однородное космологическое решение, также исходя из рассмотрения задачи для конечного тела — трехосного эллипсоида с веществом постоянной плотности.

Будем рассматривать вещество без давления, $P=0$. Известно (см., например, ТТ и ЭЗ), что в ньютоновской теории добавление (к уже существующему эллипсоидальному распределению однородного вещества) новых слоев с сохранением подобия не меняет гравитационного поля внутри первоначального распределения.

Таким образом, если удастся найти решение для движения вещества однородного эллипсоида, которое все время переводит начальный однородный эллипсоид в однородный же эллипсоид (но другой формы, ориентации в пространстве и размера), то затем, добавляя неограниченно новые слои с сохранением подобия (что никак не сказывается на движении вещества во внутренних частях), мы получим космологическое решение однородное, но с анизотропной, вообще говоря, деформацией.

Рассмотрим однородное вещество, заполняющее трехосный эллипсоид.

Как известно [см., например, Сретенский (1946)], внутри эллипсоида гравитационный потенциал является квадратичной функцией координат:

$$\varphi=\varphi_0+\frac{1}{2}\varphi_{ik}x_ix_k, \tag{18.1.1}$$

причем коэффициенты φ_0, φ_{ik} не зависят от точки. Оси тензора φ_{ik} совпадают с осями эллипсоида. Если выбрать координатные оси по осям эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, то внутри его

$$\varphi=\varphi_0+\frac{1}{2}\varphi_{xx}x^2+\frac{1}{2}\varphi_{yy}y^2+\frac{1}{2}\varphi_{zz}z^2. \tag{18.1.2}$$

В соответствии с уравнением Пуассона

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=4\pi G\rho, \tag{18.1.3}$$

но сами φ_{xx}, φ_{yy}, φ_{zz} не равны между собой: их отношения зависят от отношения осей эллипсоида. Конкретное выражение этих функций через оси эллипсоида дается длинными интегралами, явный вид которых для нас сейчас неважен [см. Сретенский (1946)]. Величина φ_{ii} (здесь нет суммирования по i!) — наибольшая для направления x_i, соответствующего самой короткой оси эллипсоида; например, в пределе $a=b\ll c$ для вытянутого эллипсоида с осью z

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2\pi G\rho, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\to 0, \tag{18.1.4}$$

а для тонкого диска $a\gg c$, $b\gg c$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=4\pi G\rho, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\to 0. \tag{18.1.5}$$

Корректная постановка задачи в ньютоновской теории заключается в следующем: задаемся в начальный момент плотностью ρ и обобщенным хаббловским линейным [Нарликар (1963)] полем скоростей (которое, как увидим далее, обеспечит нужные свойства решения):

$$u_i=H_{ik}(t_0)\,x_k. \tag{18.1.6}$$

Эта формула допускает, наряду с деформацией, наличие вращения при $H_{ik}\neq H_{ki}$. Зададимся также и уравнением *) эллипсоида $A_{ik}(t_0)x_i\,x_k=1$, ограничивающего область, заполненную веществом (внутри), от пустоты.

Выбор формы области в виде эллипсоида обеспечивает квадратичный вид потенциала φ, что приводит к линейной зависимости ускорения от координат:

$$\ddot{x}_i=-\varphi_{ik}x_k. \tag{18.1.7}$$

Отсюда следует, что зависимость скорости от координат остается с течением времени линейной: коэффициенты тензора H_{ik} зависят от времени, но не от координат. Уравнение для H_{ik} имеет вид

$$\dot{H}_{ik}=-H_{in}H_{nk}-\varphi_{ik}. \tag{18.1.8}$$

В свою очередь линейная зависимость скорости обеспечивает сохранение с течением времени однородности, поскольку $\frac{\dot\rho}{\rho}=-\operatorname{div}u=-H_{ll}$ не зависит от координат (по индексу l произведено сум-

*) Удобно записать уравнение эллипсоида в таком виде с учетом того что оси эллипсоида с течением времени могут отклониться от координатных осей.

мирование). Кроме того, линейная зависимость скорости от координат приводит к тому, что поверхность, ограничивающая вещество, все время остается эллипсоидальной, хотя коэффициенты A_{ik} меняются с течением времени:

$$\dot{A}_{ik} = -H_{li}A_{lk} - H_{mk}A_{im}. \tag{18.1.9}$$

Следует подчеркнуть, что меняется не только ориентация осей в пространстве, но и форма эллипсоида, характеризуемая отношением его полуосей. Так, в частном случае, когда в начальный момент вещество покоится, через некоторое время плотность обратится в бесконечность за счет того, что обратится в нуль полуось, которая была наименьшей в начальный момент; две другие полуоси, уменьшаясь, останутся еще конечными, в этот момент эллипсоид выродится в плоскую фигуру. С другой стороны, предположим, что в начальный момент вещество заполняло шар, так что тензор φ_{ik} был единичным, т. е. изотропным, $\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi G\rho}{3} r^2$. Пусть, однако, начальное распределение скоростей анизотропно, т. е. тензор H_{ik} не единичен. Тогда с течением времени шар, деформируясь, превратится в эллипсоид, а значит, начальная изотропия φ_{ik}, естественно, нарушится.

Система уравнений $\dot{H} = \dot{H}(H, \varphi)$, $\dot{A} = \dot{A}(A, H)$ становится замкнутой заданием зависимости φ_{ik} от A_{ik} и ρ, которая дается теорией потенциала [см. Сретенский (1946)]. Эта зависимость выражается, как известно, эллиптическими интегралами, при этом φ_{ik} симметрична и положительно определена.

Мы не будем разбирать все свойства решения задачи, отсылая интересующихся к работе Зельдовича (1964б). Остановимся, однако, на случае, который интересен с точки зрения приложений к космологической задаче получения однородного анизотропного решения.

Именно рассмотрим сначала случай, когда вращение отсутствует, т. е. тензор H_{ik} симметричен, главные его оси совпадают с осями эллипсоида *). Кроме того, ограничимся сначала случаем осевой симметрии $a=b$ (эллипсоид вращения) и потребуем, чтобы в ходе расширения при очень больших размерах (соответственно $\rho \to 0$) форма эллипсоида приближалась к форме шара, т. е. наступала «изотропизация» и скорость расширения на бесконечности стремилась к нулю (случай критической плотности). Проще всего рассмотреть не задачу об анизотропном расширении, а обратную задачу о сжатии, а затем обратить время.

Пусть имеется большой шар, слабо деформированный в эллипсоид вращения. Возможны два случая: $a=b>c$ — сплюснутый, как

*) Если вращение отсутствует в начальный момент, т. е. $H_{ik} = H_{ki}$, то из (18.1.8) следует, что это свойство сохранится и в дальнейшем.

репа, эллипсоид или $a=b<c$ — вытянутый, как огурец. Вначале в обоих случаях $|a-c|\ll a$.

Рассмотрим первый случай, $a=b>c$. Как отмечено выше, ускорение по более короткой оси больше, $\varphi_{xx}=\varphi_{yy}<\varphi_{zz}$. Следовательно, с течением времени сплюснутость будет возрастать (рис. 53) и тело превратится в некоторый момент t_0 в плоский блин, $c=0$. Объемная плотность вещества ρ в этот момент обращается в бесконечность. Гравитационная энергия блина (отрицательная) конечна. Конечным также является и гравитационное поле в любой точке, несмотря на $\rho\to\infty$. Отсюда видно, что и скорость остается конечной.

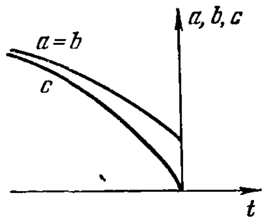

Рис. 53. Сжатие в диск сплюснутого эллипсоида. На графике показано изменение со временем величин a, $б$ и c, $a=b>c$.

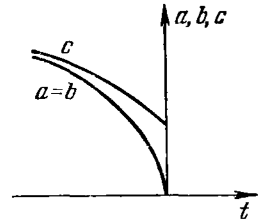

Рис. 54. Сжатие в нить вытянутого эллипсоида. На графике изображено изменение со временем величин a, b и c, $a=b<c$.

Следовательно, асимптотический при $\rho\to\infty$ закон изменения величин c и ρ с течением времени есть

$$c\sim t_0-t,\quad \rho\sim\frac{1}{t_0-t}. \tag{18.1.10}$$

Во втором случае $a=b<c$ и $\varphi_{xx}=\varphi_{yy}>\varphi_{zz}$. Эллипсоид с течением времени становится все более узким (рис. 54), и при некотором $t=t_0$ превращается в отрезок нити, $a=b=0$, c конечно. Поле вблизи длинной нити возрастает неограниченно, как $1/r$ (расстояние от нити), следовательно, скорость в ньютоновской теории стремится к бесконечности:

$$(\dot{a})^2\sim\ln\left(\frac{a_0}{a}\right)^2, \tag{18.1.11}$$

где a_0 — величина порядка $c(t_0)$.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда скорость сжатия различна по всем трем осям. Из предыдущего изложения ясен характер этого решения. Ускорение по самой короткой оси будет наибольшим, и тело превратится в некоторый момент t_0 в плоский эллипс, $c=0$, $a\neq b$ (а не круг, как было, когда $a=b$). Асимптотический закон (18.1.10), очевидно, будет справедлив и теперь.

Таким образом, случай стягивания в нить в общей ньютоновской задаче является вырожденным, он требует одновременного обращения в нуль двух величин (a и b).

Наличие вращения при обобщенном хаббловском распределении скорости, т. е. случай, когда $H_{ik} \neq H_{ki}$, качественно не изменит результат и приведет лишь к тому, что оси эллипсоида будут поворачиваться в пространстве. Бесконечная плотность достигается за счет сжатия вдоль оси вращения.

Вернемся к случаю $H_{ik}=H_{ki}$. Теперь остается обратить время (т. е. рассматривать расширение), увеличить неограниченно (добавляя новые слои вещества) размеры эллипсоида в фиксированный момент при фиксированной плотности вещества, и мы получим решение ньютоновской космологической задачи.

Величины a, b и c будут (вследствие однородности) характеризовать изменение расстояний между любыми парами точек соответственно по осям x, y и z. В силу сказанного в начале параграфа переход от конечного эллипсоида к неограниченному распределению никак не изменит зависимости a, b, c и ρ от времени.

Итак, мы получили однородную анизотропную модель в ньютоновской теории. Анализ более сложных АО моделей в ньютоновской теории см. Шикин (1970).

§ 2. Гравитационный парадокс ньютоновской теории

Можно ли было сразу решить задачу для неограниченного распределения, пользуясь уравнениями движения и уравнением Пуассона $\Delta\varphi=4\pi G\rho$, а не рассматривать предварительно задачу об эллипсоидах? Остановимся в связи с этим на некоторых принципиальных вопросах. Прежде всего заметим, что потенциал φ и вектор гравитационного поля grad φ являются ненаблюдаемыми величинами.

Наблюдаемыми величинами являются вторые производные $\varphi_{ik}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}$, от которых зависит относительное ускорение соседних частиц. На φ_{ik} наложено только одно условие (уравнение Пуассона). Следовательно, остается пять степеней свободы (имеем в виду $\varphi_{ik}=\varphi_{ki}$). Таким образом, уравнений механики и уравнения Пуассона недостаточно для решения космологической задачи! Именно этот произвол в выборе φ_{ik} в ньютоновской теории в случае бесконечного однородного вещества и следовало бы назвать гравитационным парадоксом. Обычно гравитационным парадоксом называют расходимости в φ или grad φ при бесконечных распределениях вещества. Однако, поскольку φ и grad φ ненаблюдаемы, тот факт, что $|\varphi|\to\infty$, $|\text{grad}\ \varphi|\to\infty$, трудностей не вызывает *), и называть это парадоксом не следует.

*) В этом смысле высказывания Ландау и Лифшица (1973) о трудностях ньютоновской теории в бесконечном пространстве представляются недостаточно корректными.