Наличие вращения при обобщенном хаббловском распределении скорости, т. е. случай, когда $H_{ik} \neq H_{ki}$, качественно не изменит результат и приведет лишь к тому, что оси эллипсоида будут поворачиваться в пространстве. Бесконечная плотность достигается за счет сжатия вдоль оси вращения.

Вернемся к случаю $H_{ik} = H_{ki}$. Теперь остается обратить время (т. е. рассматривать расширение), увеличить неограниченно (добавляя новые слои вещества) размеры эллипсоида в фиксированный момент при фиксированной плотности вещества, и мы получим решение ньютоновской космологической задачи.

Величины a, b и c будут (вследствие однородности) характеризовать изменение расстояний между любыми парами точек соответственно по осям x, y и z. В силу сказанного в начале параграфа переход от конечного эллипсоида к неограниченному распределению никак не изменит зависимости a, b, c и ρ от времени.

Итак, мы получили однородную анизотропную модель в ньютоновской теории. Анализ более сложных АО моделей в ньютоновской теории см. Шикин (1970).

§ 2. Гравитационный парадокс ньютоновской теории

Можно ли было сразу решить задачу для неограниченного распределения, пользуясь уравнениями движения и уравнением Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi G\rho$, а не рассматривать предварительно задачу об эллипсоидах? Остановимся в связи с этим на некоторых принципиальных вопросах. Прежде всего заметим, что потенциал φ и вектор гравитационного поля grad φ являются ненаблюдаемыми величинами.

Наблюдаемыми величинами являются вторые производные $\varphi_{ik} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}$, от которых зависит относительное ускорение соседних частиц. На φ_{ik} наложено только одно условие (уравнение Пуассона). Следовательно, остается пять степеней свободы (имеем в виду $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$). Таким образом, уравнений механики и уравнения Пуассона недостаточно для решения космологической задачи! Именно этот произвол в выборе φ_{ik} в ньютоновской теории в случае бесконечного однородного вещества и следовало бы назвать гравитационным парадоксом. Обычно гравитационным парадоксом называют расходимости в φ или grad φ при бесконечных распределениях вещества. Однако, поскольку φ и grad φ ненаблюдаемы, тот факт, что $|\varphi| \to \infty$, $|\mathrm{grad}\,\varphi| \to \infty$, трудностей не вызывает *), и называть это парадоксом не следует.

*) В этом смысле высказывания Ландау и Лифшица (1973) о трудностях ньютоновской теории в бесконечном пространстве представляются недостаточно корректными.

Многие авторы рассматривали вопрос об устранении неопределенности φ_{ik} в ньютоновской космологии. Нарликар (1963), например, предлагал потребовать, чтобы величины φ_{ik} были изотропными при анизотропии H_{ik}. Второй способ заключается в том, чтобы предварительно рассмотреть конечное тело, а затем сделать предельный переход к бесконечности. Так мы поступили в предыдущем параграфе, взяв в качестве конечного тела эллипсоид.

Однако ясно, что любой способ выбора дополнительных условий для φ_{ik} является выходом за рамки собственно ньютоновской теории.

Очевидно, эта неоднозначность ньютоновской теории получается именно в результате рассмотрения бесконечного пространства, заполненного веществом. В задаче с плотностью, достаточно быстро спадающей на бесконечности, где можно поставить условие $\varphi = 0$ на бесконечности, это условие вместе с уравнением Пуассона полностью определяет потенциал.

Зельманов (1959а) предлагает в качестве дополнительных условий для устранения неоднозначности брать условия, следующие из аналогичной задачи в релятивистской космологии. Очевидно, при этом предполагается уже известным решение релятивистской задачи. Тем не менее такой подход может оказаться полезным для рассмотрения, например, локальных возмущений в той или иной модели, так как позволит применять несравненно более простой аппарат ньютоновской теории. Мы еще вернемся к этому вопросу после рассмотрения релятивистской задачи.

В заключение еще раз подчеркнем, что ньютоновская теория не дает замкнутого решения космологической задачи. Полностью в замкнутом виде задача может быть решена лишь в ОТО.

§ 3. Простейшая релятивистская модель; «вакуумное» решение вблизи сингулярности

Мы начнем с рассмотрения анизотропного однородного решения без вращения с евклидовым сопутствующим пространством. Очевидно, в этом случае все точки трехмерного пространства равноправны, т. е. решение действительно однородно, но расширение в разных направлениях может происходить с разной скоростью.

Метрика такой модели может быть записана в виде (скорость света положена равной единице)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,dx_1^2 - b^2(t)\,dx_2^2 - c^2(t)\,dx_3^2. \tag{18.3.1}$$

Функции a, b, c зависят только от времени. Если эти функции не все одинаковы, то расширение анизотропно. Уравнения Эйнштейна