Многие авторы рассматривали вопрос об устранении неопределенности φ_{ik} в ньютоновской космологии. Нарликар (1963), например, предлагал потребовать, чтобы величины φ_{ik} были изотропными при анизотропии H_{ik}. Второй способ заключается в том, чтобы предварительно рассмотреть конечное тело, а затем сделать предельный переход к бесконечности. Так мы поступили в предыдущем параграфе, взяв в качестве конечного тела эллипсоид.

Однако ясно, что любой способ выбора дополнительных условий для φ_{ik} является выходом за рамки собственно ньютоновской теории.

Очевидно, эта неоднозначность ньютоновской теории получается именно в результате рассмотрения бесконечного пространства, заполненного веществом. В задаче с плотностью, достаточно быстро спадающей на бесконечности, где можно поставить условие $\varphi=0$ на бесконечности, это условие вместе с уравнением Пуассона полностью определяет потенциал.

Зельманов (1959а) предлагает в качестве дополнительных условий для устранения неоднозначности брать условия, следующие из аналогичной задачи в релятивистской космологии. Очевидно, при этом предполагается уже известным решение релятивистской задачи. Тем не менее такой подход может оказаться полезным для рассмотрения, например, локальных возмущений в той или иной модели, так как позволит применять несравненно более простой аппарат ньютоновской теории. Мы еще вернемся к этому вопросу после рассмотрения релятивистской задачи.

В заключение еще раз подчеркнем, что ньютоновская теория не дает замкнутого решения космологической задачи. Полностью в замкнутом виде задача может быть решена лишь в ОТО.

§ 3. Простейшая релятивистская модель; «вакуумное» решение вблизи сингулярности

Мы начнем с рассмотрения анизотропного однородного решения без вращения с евклидовым сопутствующим пространством. Очевидно, в этом случае все точки трехмерного пространства равноправны, т. е. решение действительно однородно, но расширение в разных направлениях может происходить с разной скоростью.

Метрика такой модели может быть записана в виде (скорость света положена равной единице)

$$ds^2=dt^2-a^2(t)\,dx_1^2-b^2(t)\,dx_2^2-c^2(t)\,dx_3^2. \qquad (18.3.1)$$

Функции a, b, c зависят только от времени. Если эти функции не все одинаковы, то расширение анизотропно. Уравнения Эйнштейна могут быть записаны в таком виде:

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{b}}{b}+\frac{\dot{c}}{c}\right)=-8\pi G\left(T_1^1-\frac{1}{2}T\right), \qquad (18.3.2)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\dot{b}}{b}\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{c}}{c}\right)=-8\pi G\left(T_2^2-\frac{1}{2}T\right), \qquad (18.3.3)$$

$$\frac{\ddot{c}}{c}+\frac{\dot{c}}{c}\left(\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{b}}{b}\right)=-8\pi G\left(T_3^3-\frac{1}{2}T\right), \qquad (18.3.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\ddot{c}}{c}=-8\pi G\left(T_0^0-\frac{1}{2}T\right). \qquad (18.3.5)$$

Подчеркнем, что в левые части уравнений входят только величины $\frac{\dot{a}}{a}$ и $\frac{\ddot{a}}{a}$, но не сами величины a, b, c. Это связано с тем, что сопутствующее трехмерное пространство плоское и его кривизна (выражающаяся через a, b, c) равна нулю и в уравнениях отсутствует. Проведем анализ этих уравнений.

Предположим, что в некоторый момент члены в правых частях уравнений (18.3.2) — (18.3.5) много меньше, чем слагаемые в левых частях. Тогда мы можем рассматривать эти уравнения без правых частей, т. е. решение для пустого пространства. Такое решение получено Казнером (1921):

$$a=a_0t^{p_1}, \qquad b=b_0t^{p_2}, \qquad c=c_0t^{p_3}, \qquad (18.3.6)$$

$$p_1+p_2+p_3=p_1^2+p_2^2+p_3^2=1. \qquad (18.3.7)$$

Соотношение (18.3.7) оставляет из трех величин p_1, p_2, p_3 только одну произвольную, являющуюся свободным параметром, и величины p_1, p_2, p_3 могут быть выражены через этот параметр (обозначим его p, $0<p\leqslant 1$):

$$p_1=-\frac{p}{p^2+p+1}, \qquad p_2=\frac{p(p+1)}{p^2+p+1}, \qquad p_3=\frac{p+1}{p^2+p+1}. \qquad (18.3.8)$$

При этом $-\frac{1}{3}\leqslant p_1\leqslant 0$; $0\leqslant p_2\leqslant\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}\leqslant p_3\leqslant 1$. В решении Казнера система отсчета расширяется по двум направлениям (x_2, x_3) и сжимается по третьему (x_1). Единственным исключением является вырожденный случай $p_1=p_2=0$, $p_3=1$. Однако он соответствует плоскому 4-мерному пространству-времени $R_{iklm}=0$. Преобразованием координат метрика (18.3.1) в этом случае может быть приведена в метрике Минковского. В случае общего казнеровского решения, конечно, $R_{iklm}\neq 0$, хотя $R_{ik}=0$. Заметим, что «вакуумное» решение Казнера не содержит изотропного решения $p_1=p_2=p_3$. Объем элемента сопутствующего пространства в решении Казнера меняется, как $V\sim t$.

Теперь можно найти область применимости полученного решения. Сравним, как меняются члены в правых частях уравнений (18.3.2) — (18.3.5) при движении по времени к сингулярности, $t \to 0$, и к бесконечности, $t \to \infty$. В левые части этих уравнений входят величины вида $\frac{\ddot{a}}{a}$, $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ и т. п., имеющие порядок t^{-2}. Пусть тензор энергии-импульса является гидродинамическим и уравнение состояния $P=\beta\varepsilon$. Вещество покоится относительно системы отсчета. Тогда величины, стоящие в правых частях уравнений, пропорциональны $T_i^k \sim V^{-(1+\beta)} \sim t^{-(1+\beta)}$. Мы видим, что для $0 \leqslant \beta < 1$ показатель степени при t для правых частей уравнений (18.3.2) — (18.3.5) меньше по модулю, чем 2, т. е. меньше, чем для левых частей уравнений. Значит, при продвижении к сингулярности, $t \to 0$, правой частью можно всегда пренебречь по сравнению с левой и решение асимптотически не зависит от наличия вещества, что подчеркивают Лифшиц и Халатников (1963а, б). Эту стадию можно назвать «вакуумной».

При продвижении к $t \to \infty$ члены, описывающие материю, уменьшаются медленнее, чем $1/t^2$, и наступает момент, когда этими членами нельзя пренебречь. Кончается период «вакуумного» решения. Подробнее этот поздний период расширения мы рассмотрим в следующей главе.

§ 4. Сравнение ньютоновской и релятивистской задач

Для простейшего случая $P=0$ точное решение уравнений (18.3.2) — (18.3.5) было получено Шюкингом и Гекманом (1958). Мы рассмотрим прежде всего это решение с целью сравнить его с аналогичной задачей в ньютоновской теории (см. § 1). Кроме того, как мы увидим далее, это решение содержит некоторые основные особенности решений более сложных задач. Решение Шюкинга — Гекмана записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 t^{p_1} (t+t_0)^{2/3-p_1}, \\ b &= b_0 t^{p_2} (t+t_0)^{2/3-p_2}, \\ c &= c_0 t^{p_3} (t+t_0)^{2/3-p_3}, \end{aligned}\right\} \tag{18.4.1}$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t(t+t_0)}; \tag{18.4.2}$$

для p_1, p_2, p_3 справедливы соотношения (18.3.7) и (18.3.8). В этом решении вакуумная стадия имеет место при $t \ll t_0$. При $t \gg t_0$ решение изотропизуется и переходит в решение Фридмана.

Сравним релятивистское решение с приведенным выше, в § 1, решением ньютоновской задачи. Для этого будем рассматривать, как и там, не расширение, а сжатие, т. е. обратим время. Как и в