Теперь можно найти область применимости полученного решения. Сравним, как меняются члены в правых частях уравнений (18.3.2) — (18.3.5) при движении по времени к сингулярности, $t \to 0$, и к бесконечности, $t \to \infty$. В левые части этих уравнений входят величины вида $\frac{\ddot{a}}{a}$, $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ и т. п., имеющие порядок t^{-2}. Пусть тензор энергии-импульса является гидродинамическим и уравнение состояния $P=\beta\varepsilon$. Вещество покоится относительно системы отсчета. Тогда величины, стоящие в правых частях уравнений, пропорциональны $T_i^k \sim V^{-(1+\beta)} \sim t^{-(1+\beta)}$. Мы видим, что для $0 \leqslant \beta < 1$ показатель степени при t для правых частей уравнений (18.3.2) — (18.3.5) меньше по модулю, чем 2, т. е. меньше, чем для левых частей уравнений. Значит, при продвижении к сингулярности, $t \to 0$, правой частью можно всегда пренебречь по сравнению с левой и решение асимптотически не зависит от наличия вещества, что подчеркивают Лифшиц и Халатников (1963а, б). Эту стадию можно назвать «вакуумной».

При продвижении к $t \to \infty$ члены, описывающие материю, уменьшаются медленнее, чем $1/t^2$, и наступает момент, когда этими членами нельзя пренебречь. Кончается период «вакуумного» решения. Подробнее этот поздний период расширения мы рассмотрим в следующей главе.

§ 4. Сравнение ньютоновской и релятивистской задач

Для простейшего случая $P=0$ точное решение уравнений (18.3.2) — (18.3.5) было получено Шюкингом и Гекманом (1958). Мы рассмотрим прежде всего это решение с целью сравнить его с аналогичной задачей в ньютоновской теории (см. § 1). Кроме того, как мы увидим далее, это решение содержит некоторые основные особенности решений более сложных задач. Решение Шюкинга — Гекмана записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 t^{p_1} (t+t_0)^{2/3-p_1}, \\ b &= b_0 t^{p_2} (t+t_0)^{2/3-p_2}, \\ c &= c_0 t^{p_3} (t+t_0)^{2/3-p_3}, \end{aligned}\right\} \tag{18.4.1}$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t(t+t_0)}; \tag{18.4.2}$$

для p_1, p_2, p_3 справедливы соотношения (18.3.7) и (18.3.8). В этом решении вакуумная стадия имеет место при $t \ll t_0$. При $t \gg t_0$ решение изотропизуется и переходит в решение Фридмана.

Сравним релятивистское решение с приведенным выше, в § 1, решением ньютоновской задачи. Для этого будем рассматривать, как и там, не расширение, а сжатие, т. е. обратим время. Как и в ньютоновском решении, возможны два качественных разных случая. Первый случай связан со специальным, единственным выбором p_i: $p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=1$; зависимость $a=b$ и c от времени полностью аналогична в пределе $t\to 0$ случаю сплюснутого эллипсоида вращения ньютоновской задачи. Если же $p_1\neq 0$, поведение решения вблизи особенности приобретает совсем другой характер (рис. 55). При больших $|t|$ имеем $\ddot{a}<0$, $\ddot{b}<0$, $\ddot{c}<0$ аналогично ньютоновской задаче. Но при некотором t изменяется знак относительного ускорения по оси x_1 и $\ddot{a}>0$. В момент $t=\frac{3}{2}|p_1|t_0$ меняется и знак относительной скорости по этой оси — сжатие меняется на растяжение, наступает вакуумная стадия. В пределе при $t\to\infty$ расстояние между соседними частицами по оси x_1 растет неограниченно.

Указанные особенности решение имеет при любых допустимых значениях p_1, за исключением указанного выше случая $p_1=0$. Следовательно, в релятивистской задаче, изучаемой здесь, сжатие в нить является общим, а в блин — исключительным случаем. Таким образом, релятивистское решение с вакуумной стадией качественно отличается от решения ньютоновской задачи для эллипсоида. Локальные свойства релятивистского решения не получаются путем ньютоновского рассмотрения задачи, как это было для изотропного однородного случая.

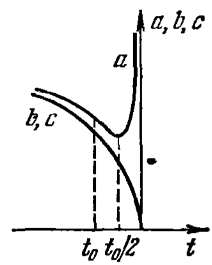

Рис. 55. Сжатие однородного анизотропного вещества в релятивистской задаче. На графике изображено изменение со временем величин a, b, c для случая $p_1=-1/3$.

Растяжение по одной оси и сжатие по двум другим на вакуумной стадии (при рассмотрении сжатия вещества) аналогично приливному эффекту во внешнем поле тяготеющего тела. Например, водная оболочка Земли испытывает такие относительные ускорения в поле тяготения Луны. Она вытягивается вдоль линии Земля — Луна и сжимается в перпендикулярных направлениях.

Вернемся к вопросу о причинах несоответствия ньютоновских и релятивистских космологических решений. В рамках ньютоновской механики все линейные размеры, фигурирующие в задаче, можно менять, сохраняя подобие, без изменения локальных свойств решения, т. е. без изменения зависимости от времени величин $\rho(t)$, $H_{ik}(t)$, $\varphi_{ik}(t)$.

Почему же получающиеся закономерности не согласуются с релятивистскими космологическими решениями?

В релятивистской теории играет роль скорость света. Точное релятивистское решение задачи о движении конечного объема, заполненного веществом, зависит не только от ρ, H_{ik}, φ_{ik}, но и от безразмерных критериев вида $G\rho r^2/c^2$ и $H_{ik}\, r/c$, где r — характерный размер.

Ньютоновские решения являются предельной формой точных релятивистских решений в пределе при стремящихся к нулю критериях, указанных выше. Однако космологические решения должны осуществляться в противоположном предельном случае, когда критерии стремятся к бесконечности. Поэтому эти решения не совпадают с ньютоновскими.

Особенность задачи заключается в том, что в специальном случае симметрии задачи (соответствующей изотропному решению) релятивистские критерии выпадают из формул, относящихся к локальным величинам. Однако этот факт не обобщается на эллипсоидальные решения. Различие между сферическим и эллипсоидальным случаями проявляется, в частности, при рассмотрении гравитационного излучения.

В общей теории относительности при движении сферического слоя вещества поле снаружи не изменяется, поле внутри равно нулю и также не меняется. При движении эллипсоидального слоя квадрупольный момент распределенной массы изменяется, следовательно, должно происходить излучение гравитационной волны.

По-видимому, и поле внутри движущейся эллипсоидальной полой оболочки (равное нулю в ньютоновском приближении) в общей теории относительности отлично от нуля. Происходит нечто вроде проникновения гравитационной волны внутрь полости, хотя строго о волне нельзя говорить на расстояниях меньше $c\tau$, где τ — характерное время движения, и лучше говорить о переменном гравитационном поле.

Рассмотрим тело, для которого в начальном состоянии релятивистские критерии малы. Если это тело сжимается, то плотность и скорость движения нарастают, и поэтому на последних стадиях движение в теле конечной массы может приобрести черты, характерные для анизотропного космологического решения. При этом переменное гравитационное поле от движения внешних оболочек, имеющее «приливной» характер (т. е. растягивающее вещество в одном направлении и сжимающее в двух других направлениях), будет определять динамику движения внутренних слоев.

Качественное отличие первого (вырожденного) случая $p_1=0$, когда релятивистское решение аналогично ньютоновскому, от второго (общего) случая $p_1 \neq 0$, когда эти решения не похожи, состоит в том, что в первом случае в ньютоновской задаче гравитационное поле и скорость сжатия вблизи $\rho=\infty$ остаются конечными, во втором случае они неограниченно нарастают.