ГЛАВА 19

МАТЕРИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

§ 1. Изотропизация решения с паскалевским тензором энергии-импульса

Рассмотрим теперь сравнительно поздние стадии расширения анизотропной модели, когда в уравнениях тяготения уже нельзя пренебречь членами в правой части, описывающими тяготение материи, и решение уже не является «вакуумным». По-прежнему считаем материю покоящейся относительно системы отсчета.

Время окончания вакуумного решения при любом гидродинамическом уравнении состояния материи $P=\beta\varepsilon$ легко определить из указанных в § 3 гл. 18 соображений. Этот момент наступает, когда члены в правой части уравнений Эйнштейна сравниваются с членами в левой части. Члены в левой части имеют порядок $\frac{\ddot{a}}{a}\approx\frac{1}{t^2}$, члены в правой части $4\pi G\rho\approx 4\pi G\frac{1}{V^{1+\beta}}=4\pi G\frac{A}{t^{1+\beta}}$, где A — произвольная константа — параметр задачи, описывающий количество материи в модели, β — коэффициент в выражении $P=\beta\varepsilon$. Приравнивая эти члены, находим момент θ_1 окончания вакуумного решения:

$$\theta_1=\left(\frac{1}{GA}\right)^{1/(1-\beta)}. \qquad (19.1.1)$$

Конечно, утверждение, что все члены в левой части уравнений имеют порядок не меньше чем $1/t^2$, справедливо только в том случае, если показатель p_1 (а значит, и p_2) не специально мал по модулю. В противном случае ответ будет зависеть и от p_1. В случае, когда $|p_1|\ll 1$, старшие члены в левых частях уравнений (18.3.2) и (18.3.3) будут иметь порядок $|p_1|/t^2$, и мы находим момент θ_2 начала влияния правых частей в системе уравнений (18.3.2) — (18.3.5):

$$\theta_2\approx\left(\frac{|p_1|}{GA}\right)^{1/(1-\beta)}. \qquad (19.1.2)$$

Эта формула обобщает (19.1.1) на случай малых $|p_1|\ll 1$.

Как можно показать, в случае не малых $|p_1|$ сразу после момента θ_1 решение быстро приближается к фридмановскому изотропному решению. Если же $|p_1| \ll 1$, то вслед за окончанием вакуумной стадии со сжатием вдоль первой оси и сменой его расширением наступает длительная стадия медленного расширения по двум осям и быстрого расширения по третьей оси, т. е. решение еще сильно анизотропно. К моменту θ_1, даваемому формулой (19.1.1), темп расширения по всем трем осям выравнивается и наступает изотропизация. Таким образом, θ_1 есть всегда для любых p_1 время «изотропизации» анизотропного решения.

Физическая причина сравнительно слабого влияния тяготения материи на динамику расширения в случае $|p_1| \ll 1$ указана в последнем абзаце предыдущего параграфа.

Очевидно, для приложений наибольший интерес представляет случай горячей модели, когда уравнение состояния есть $P = \varepsilon/3$. Точные решения этой задачи были получены Компанейцем и Черновым (1964), Дорошкевичем (1965) и Рубаном (частное сообщение). Мы не будем приводить здесь точные решения, а укажем удобную приближенную запись, хорошо аппроксимирующую решение на всем интервале изменения времени $0 \leqslant t < \infty$ и дающую точные асимптотические выражения при $t \to 0$ и $t \to \infty$. Эта приближенная форма записывается в следующем виде:

$$a_i = a_{0i} t^{p_i} (t + t_0)^{2/3 - p_i}, \tag{19.1.3}$$

$$\rho = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^{4/3} (t + t_0)^{2/3}}, \tag{19.1.4}$$

где a_i — масштабные коэффициенты вдоль трех осей, а p_i удовлетворяют соотношениям (18.3.7). При $t \to 0$ получаем решение Казнера, как это и должно быть. При $t \to \infty$ решение переходит во фридмановское. Время изотропизации $\theta_1 \approx t_0$. Это время удобно принять за произвольный параметр задачи.

§ 2. Влияние пространственной анизотропии тензора энергии-импульса на космологическое решение

До сих пор мы рассматривали в космологических задачах лишь гидродинамический тензор энергии-импульса $(T_{ik})_{\text{гидр}} = (\varepsilon + P) u_i u_k + g_{ik} P$. Этот тензор пространственно изотропен; для давления выполняется закон Паскаля. Однако, как известно, это условие выполнено далеко не всегда. Например, для однородного магнитного поля, направленного по оси x^3, тензор энергии-импульса может быть записан в виде

$$-T_1^1 = -T_2^2 = T_3^3 = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}, \qquad T_0^0 = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}, \tag{19.2.1}$$

где $\mathcal{H}$ — напряженность поля.