решению. Если же $|p_1| \ll 1$, то вслед за окончанием вакуумной стадии со сжатием вдоль первой оси и сменой его расширением наступает длительная стадия медленного расширения по двум осям и быстрого расширения по третьей оси, т. е. решение еще сильно анизотропно. К моменту θ_1, даваемому формулой (19.1.1), темп расширения по всем трем осям выравнивается и наступает изотропизация. Таким образом, θ_1 есть всегда для любых p_1 время «изотропизации» анизотропного решения.

Физическая причина сравнительно слабого влияния тяготения материи на динамику расширения в случае $|p_1| \ll 1$ указана в последнем абзаце предыдущего параграфа.

Очевидно, для приложений наибольший интерес представляет случай горячей модели, когда уравнение состояния есть $P = \varepsilon/3$. Точные решения этой задачи были получены Компанейцем и Черновым (1964), Дорошкевичем (1965) и Рубаном (частное сообщение). Мы не будем приводить здесь точные решения, а укажем удобную приближенную запись, хорошо аппроксимирующую решение на всем интервале изменения времени $0 \leqslant t < \infty$ и дающую точные асимптотические выражения при $t \to 0$ и $t \to \infty$. Эта приближенная форма записывается в следующем виде:

$$a_i = a_{0i} t^{p_i} (t + t_0)^{2/3 - p_i}, \tag{19.1.3}$$

$$\rho = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^{4/3} (t + t_0)^{2/3}}, \tag{19.1.4}$$

где a_i — масштабные коэффициенты вдоль трех осей, а p_i удовлетворяют соотношениям (18.3.7). При $t \to 0$ получаем решение Казнера, как это и должно быть. При $t \to \infty$ решение переходит во фридмановское. Время изотропизации $\theta_1 \approx t_0$. Это время удобно принять за произвольный параметр задачи.

§ 2. Влияние пространственной анизотропии тензора энергии-импульса на космологическое решение

До сих пор мы рассматривали в космологических задачах лишь гидродинамический тензор энергии-импульса $(T_{ik})_{\text{гидр}} = (\varepsilon + P) u_i u_k + g_{ik} P$. Этот тензор пространственно изотропен; для давления выполняется закон Паскаля. Однако, как известно, это условие выполнено далеко не всегда. Например, для однородного магнитного поля, направленного по оси x^3, тензор энергии-импульса может быть записан в виде

$$-T_1^1 = -T_2^2 = T_3^3 = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}, \quad T_0^0 = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}, \tag{19.2.1}$$

где $\mathcal{H}$ — напряженность поля.

Этот тензор неизотропен. По оси x^3 имеется натяжение, «отрицательное» давление, по осям x^1 и x^2— положительное давление. Другим примером может служить направленный поток релятивистских частиц (например, фотонов или нейтрино), движущихся без столкновений вдоль оси x^3 поровну в обоих направлениях этой оси. Для такого потока тензор энергии-импульса записывается в виде

$$T_3^3 = -\varepsilon, \qquad T_0^0 = \varepsilon, \qquad \text{остальные} \quad T_k^i = 0. \qquad (19.2.2)$$

Здесь положительное давление, равное плотности энергии, имеется лишь в направлении оси x^3. Вдоль двух других направлений давление равно нулю.

Подчеркнем, что в обоих упомянутых случаях нет направленного потока энергии относительно системы отсчета, все $T_0^i = 0$.

Мы увидим далее, что при рассмотрении задач анизотропной космологии возникновение пространственной анизотропии тензора энергии-импульса неизбежно. В частности, рассмотренные выше примеры (19.2.1) и (19.2.2) не искусственны, тензоры такого вида действительно встретятся при дальнейшем изложении. В этом параграфе мы не будем касаться случаев направленных потоков энергии $T_0^i \neq 0$, хотя эти случаи важны для космологии, однако они требуют специального подхода и будут рассмотрены далее. В данном параграфе рассматривается влияние пространственной анизотропии на расширение, на ускорение вещества в разных направлениях. Сразу же подчеркнем, что вследствие однородности никакого градиента давления нет, нет и никаких сил, с ним связанных. Влияние анизотропии давления может быть только гравитационным.

Как известно, в ОТО гравитационное поле зависит и от давления (см. § 1 гл. 2 данной книги и более подробно § 5 и § 6 гл. 1 ТТ и ЭЗ). Изотропное положительное давление замедляет расширение. Анизотропия давления должна создавать анизотропию ускорений деформации вещества. Из вида уравнений (18.3.2) — (18.3.5) видно, как влияет анизотропия T_i^k на относительное ускорение. В самом деле, рассмотрим два решения. Пусть для обоих решений (обозначим их 1 и 2) в некоторый момент времени все первые производные по соответствующим осям равны

$$\left[\left(\frac{\dot a}{a}\right)_1 = \left(\frac{\dot a}{a}\right)_2, \ \left(\frac{\dot b}{b}\right)_1 = \left(\frac{\dot b}{b}\right)_2, \ \left(\frac{\dot c}{c}\right)_1 = \left(\frac{\dot c}{c}\right)_2\right]$$

и для плотности энергии и следа тензора имеем $(T_0^0)_1 = (T_0^0)_2$, $(T)_1 = (T)_2$. Пусть, далее, в первом решении тензор $T_{\alpha\beta}$ изотропен: $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$, а во втором решении тензор $T_{\alpha\beta}$ анизотропен. Как повлияет это на ускорения?

Из уравнений (18.3.2) — (18.3.5) находим

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\ddot a}{a}\right)_2-\left(\frac{\ddot a}{a}\right)_1&=-8\pi G\left[(T_1^1)_2-(T_1^1)_1\right],\\ \left(\frac{\ddot b}{b}\right)_2-\left(\frac{\ddot b}{b}\right)_1&=-8\pi G\left[(T_2^2)_2-(T_2^2)_1\right],\\ \left(\frac{\ddot c}{c}\right)_2-\left(\frac{\ddot c}{c}\right)_1&=-8\pi G\left[(T_3^3)_2-(T_3^3)_1\right].\end{aligned}\right\} \qquad (19.2.3)$$

Таким образом, возникающая анизотропия относительных ускорений пропорциональна анизотропии T_α^β и противоположна по знаку. Очевидно, заметное влияние тензора T_{ik} на расширение модели возможно лишь в том случае, когда в правой части уравнений (18.3.2) — (18.3.5) есть члены, сравнимые по порядку величины с членами в левой части, так же как это было для изотропного T_{ik} в анизотропных моделях. Однако анизотропный тензор T_{ik}, вообще говоря, не может обеспечить изотропизацию решения (если нет других факторов изотропизации, см. об этом далее).

Для иллюстрации сказанного рассмотрим анизотропные космологические решения с приведенными выше тензорами энергии-импульса (19.2.1) и (19.2.2). Первое решение с однородным магнитным полем и метрикой (18.3.1) рассмотрено, например, Розеном (1964).

Пусть поле направлено вдоль оси z $\left(W=\frac{\mathscr{H}^2}{8\pi}\right)$. Решение может быть записано в параметрическом виде:

$$\left.\begin{aligned}&a=a_0\xi^p(\xi+\xi^{-1}),\quad b=b_0\xi^{1/p}(\xi+\xi^{-1}),\\ &c=c_0(\xi+\xi^{-1})^{-1},\\ &dt=\xi_0\xi^{p+\frac{1}{p}-1}(\xi+\xi^{-1})\,d\xi,\end{aligned}\right\} \qquad (19.2.4)$$

где

$$\xi_0=\frac{\sqrt{\varkappa W}}{2}\,\frac{ab}{a_0b_0}=\mathrm{const},\quad 0<p\leqslant 1,\quad 0<\xi<\infty.$$

Вблизи сингулярности $\xi\to 0$ решение имеет следующий асимптотический вид:

$$a=a_0't^{p_1},\qquad b=b_0't^{p_2},\qquad c=c_0't^{p_3}, \qquad (19.2.5)$$

а p_1, p_2, p_3 удовлетворяют соотношениям, аналогичным (18.3.8), причем

$$p_1=\frac{p(p-1)}{p^2-p+1},\quad p_2=\frac{1-p}{p^2-p+1},\quad p_3=\frac{p}{p^2-p+1},\qquad 0<p\leqslant 1. \qquad (19.2.6)$$

Очевидно, p_1, p_2, p_3 удовлетворяют соотношениям (18.3.7) и асимптотическое решение (19.2.5) является «вакуумным». Показатель p_1 всегда отрицателен, $0<-p_1\leqslant\frac{1}{3}$, а p_2 и p_3 положительны, причем возможно и $p_2>p_3$ и $p_3>p_2$.

Так как решение «вакуумное» при $t\to 0$, то, следовательно, магнитное поле асимптотически при $t\to 0$ не влияет на решение. Действительно, в этом случае энергия поля растет, как

$$\mathscr{H}^2\sim t^{-2(p_1+p_2)}, \qquad (19.2.7)$$

и вследствие (19.2.6) имеем $2(p_1+p_2)\leqslant 2$. Поэтому членами в правой части уравнений тяготения можно пренебречь по сравнению с членами в левой части, которые пропорциональны $\sim 1/t^2$.

Подчеркнем, что решение с магнитным полем ие допускает решения с отрицательным p_3 (вдоль поля). В этом случае энергия поля при $t\to 0$ нарастала бы быстрее, чем $1/t^2$, и пренебрегать этими членами было бы нельзя.

Когда в ходе расширения в рассматриваемом решении кончается вакуумная стадия, влияние правой части на решение отличается от случая изотропного тензора $T_{\alpha\beta}$. Рассмотрим, в чем заключается это влияние. Сравним влияние $(T_{\alpha\beta})_{\text{м.п}}$ магнитного поля с влиянием изотропного тензора $(T_{\alpha\beta})_{\text{изотр}}$ с тем же ε и с тем же средним давлением $P=\frac{1}{3}\varepsilon$ (т. е. с тем же $T_1^1+T_2^2+T_3^3$, а значит, и с тем же $T=T_i^i=0$). Тензор $(T_{\alpha\beta})_{\text{изотр}}$, очевидно, описывает релятивистский газ. Подставив (19.2.1) и тензор релятивистского газа в уравнения (19.2.3), получим

$$\Delta\frac{\ddot a}{a}=\Delta\frac{\ddot b}{b}=8\pi G\left(\frac{2}{3}\varepsilon\right),\quad \Delta\frac{\ddot c}{c}=-8\pi G\left(\frac{4}{3}\varepsilon\right). \qquad (19.2.8)$$

Сильнее всего влияние анизотропии $T_{\alpha\beta}$ на $\frac{\ddot c}{c}$, увеличивающее модуль отрицательной величины $\frac{\ddot c}{c}$. В результате замедленное расширение по оси x^3 переходит в сжатие. По оси x^1, как и в изотропном случае, сжатие меняется на расширение. И в целом при $t\to\infty$ решение снова становится «вакуумным» и имеет вид (19.2.5), только в (19.2.6) надо сделать замену $p\to p+1$, а p_2 и p_3 поменять местами.

Разумеется, рассмотренная задача является модельной, и при $t\to\infty$ решение, во всяком случае, неприменимо для описания реальной Вселенной. Однако, как мы покажем в § 3, на некотором интервале времени решение, возможно, имеет отношение к анализу процессов в начале космологического расширения.

Приведем теперь решение для релятивистских частиц, движущихся по оси x^3 с $T_{\alpha\beta}=\{-T_0^0=T_3^3=-\varepsilon,\ T_1^1=T_2^2=0\}$:

$$\left.\begin{aligned} &a=a_0\xi^{1/2-p},\quad b=b_0\xi^{1/2+p},\quad c=c_0\xi^{p^2-1/4}e^{\xi},\\ &dt=t_0\xi^{p^2-1/4}e^{\xi}d\xi,\quad \varkappa\varepsilon=t_0^{-2}\xi^{-1/2-2p^2}e^{-2\xi},\end{aligned}\right\} \qquad (19.2.9)$$

где a_0, b_0, c_0, $t_0=\mathrm{const}$, $0 \leqslant p \leqslant {}^1/_2$, $\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна.

При $t \to 0$ решение асимптотически «вакуумное», с отрицательным показателем p_3 по оси x^3. При $t \to \infty$ решение вновь становится «почти вакуумным», но уже с расширением по оси x^3 по закону $c \sim t$ и с логарифмически медленным расширением по осям x^1 и x^2. Качественный анализ влияния анизотропии $T_{\alpha\beta}$ на решение в этом случае читатель проделает самостоятельно по аналогии с предыдущим.

§ 3. Космологические модели с однородным магнитным полем

До недавнего прошлого проблема спонтанного возникновения магнитного поля в галактиках встречалась с серьезными трудностями (см. § 7 гл. 14). В тот период появился целый ряд работ (как теоретических, так и основанных на обработке наблюдательных данных), в которых рассматривается изначальное магнитное поле, существовавшее до появления галактик, и усилением этого изначального магнитного поля пытались объяснить магнитное поле галактик.

В настоящее время теории генерации и последующего усиления магнитного поля, вероятно, позволяют объяснить наблюдаемые магнитные поля в галактиках. Таким образом, непосредственная причина введения первичного магнитного поля в теоретическую космологию отпала. Тем не менее, конечно, нет никаких доказательств отсутствия изначального слабого межгалактического поля с $\mathscr{H} \approx \approx 10^{-7}$ *гс* или меньше для сегодняшнего момента. Более того, появляются работы [см., например, Рейнгардт и Тил (1970), Рейнгардт и Робертс (1972), Рейнгардт (1972)], основанные на обработке наблюдательных данных, в которых высказываются соображения в пользу существования такого поля.

Мы рассмотрим в настоящем параграфе космологические модели с однородным магнитным полем. Упомянем здесь некоторые работы по этой проблеме (список, разумеется, не полный): Брахмачари (1965), Хойл (1958), Розен (1964), Зельдович (1965б, 1969), Халатников (1965, 1967), Дорошкевич (1965), Торн (1967), Якобс (1969).

Важнейшие свойства такой модели заключаются в том, что магнитное поле существует, несмотря на отсутствие электрического тока где бы то ни было, что формально следует из однородности поля $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B}=0$*). Уравнения ОТО совместно с уравнениями Максвелла приводят к выполнению условия геометрической вмороженности поля (сохранения потока поля через контур, состоящий из данных пробных частиц, образующих систему отсчета, независимо от проводимости вещества или даже в отсутствие вещества).

*) Конечное тело при таком условии имеет ток на поверхности.