где a_0, b_0, c_0, $t_0=\mathrm{const}$, $0\leqslant p\leqslant {}^1/_2$, $\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна.

При $t\to 0$ решение асимптотически «вакуумное», с отрицательным показателем p_3 по оси x^3. При $t\to\infty$ решение вновь становится «почти вакуумным», но уже с расширением по оси x^3 по закону $c\sim t$ и с логарифмически медленным расширением по осям x^1 и x^2. Качественный анализ влияния анизотропии $T_{\alpha\beta}$ на решение в этом случае читатель проделает самостоятельно по аналогии с предыдущим.

§ 3. Космологические модели с однородным магнитным полем

До недавнего прошлого проблема спонтанного возникновения магнитного поля в галактиках встречалась с серьезными трудностями (см. § 7 гл. 14). В тот период появился целый ряд работ (как теоретических, так и основанных на обработке наблюдательных данных), в которых рассматривается изначальное магнитное поле, существовавшее до появления галактик, и усилением этого изначального магнитного поля пытались объяснить магнитное поле галактик.

В настоящее время теории генерации и последующего усиления магнитного поля, вероятно, позволяют объяснить наблюдаемые магнитные поля в галактиках. Таким образом, непосредственная причина введения первичного магнитного поля в теоретическую космологию отпала. Тем не менее, конечно, нет никаких доказательств отсутствия изначального слабого межгалактического поля с $\mathscr{H}\approx\approx 10^{-7}$ *гс* или меньше для сегодняшнего момента. Более того, появляются работы [см., например, Рейнгардт и Тил (1970), Рейнгардт и Робертс (1972), Рейнгардт (1972)], основанные на обработке наблюдательных данных, в которых высказываются соображения в пользу существования такого поля.

Мы рассмотрим в настоящем параграфе космологические модели с однородным магнитным полем. Упомянем здесь некоторые работы по этой проблеме (список, разумеется, не полный): Брахмачари (1965), Хойл (1958), Розен (1964), Зельдович (1965б, 1969), Халатников (1965, 1967), Дорошкевич (1965), Торн (1967), Якобс (1969).

Важнейшие свойства такой модели заключаются в том, что магнитное поле существует, несмотря на отсутствие электрического тока где бы то ни было, что формально следует из однородности поля rot $\boldsymbol{B}=0$*). Уравнения ОТО совместно с уравнениями Максвелла приводят к выполнению условия геометрической вмороженности поля (сохранения потока поля через контур, состоящий из данных пробных частиц, образующих систему отсчета, независимо от проводимости вещества или даже в отсутствие вещества).

*) Конечное тело при таком условии имеет ток на поверхности.

Зависящее от времени магнитное поле сопровождается появлением электрического поля, однако вмороженность поля приводит к тому, что наблюдатель, движущийся вместе с веществом, естественно, никакого электрического поля в своей системе не обнаруживает (это и есть признак вмороженности).

Выведем это свойство в ОТО для метрики (18.3.1).

Уравнения Максвелла записываются в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}F^{ik}\right)=0, \tag{19.3.1}$$

так как ток отсутствует в силу однородности поля. Теперь предполагаем, что однородное магнитное поле направлено по оси x^3. Тогда частным решением написанного выше уравнения Максвелла будет

$$\mathcal{H}_{x^3}=\frac{\text{const}}{ab}, \quad \mathcal{E}_{x^3}=\mathcal{E}_{x^2}=\mathcal{E}_{x^1}=0, \quad \mathcal{H}_{x^1}=\mathcal{H}_{x^2}=0. \tag{19.3.2}$$

Таким образом, в сопутствующем пространстве магнитное поле не вызывает появления электрического. Силовые линии поля неподвижны относительно системы отсчета.

Другим независимым решением будет вмороженное электрическое поле, направленное по любой из осей. Например, для электрического поля по оси x^3

$$\mathcal{E}_{x^3}=\frac{\text{const}}{ab}, \quad \mathcal{E}_{x^1}=\mathcal{E}_{x^2}=0, \quad \mathcal{H}_{x^1}=\mathcal{H}_{x^2}=\mathcal{H}_{x^3}=0. \tag{19.3.3}$$

Формально все модели и выводы этого параграфа остаются в силе, если однородное магнитное поле заменить электрическим. Однако однородное метагалактическое электрическое поле должно вызывать появление электрического тока заряженных частиц и быстро затухать. В настоящее время нет никаких оснований предполагать наличие общего электрического поля (в отличие от предположений об общем магнитном поле). Поэтому модель с электрическим полем вряд ли имеет какое-либо отношение к реальности.

Вернемся к модели с магнитным полем и расширяющимся веществом. Заряженные частицы, движущиеся относительно вещества, отклоняются полем, но их энергия, измеренная наблюдателем там, где они в данный момент находятся, по-прежнему только уменьшается в ходе расширения.

Уравнения общей задачи о магнитной модели Вселенной получаются из уравнений (18.3.2) — (18.3.5), где в правую часть надо подставить тензор T^i_k, являющийся суммой тензора магнитного поля (19.2.1) и тензора энергии-импульса обычной материи, имеющего для релятивистского газа следующий вид:

$$(T^0_0)_{\text{вещ}}=\varepsilon, \qquad (T^1_1)_{\text{вещ}}=(T^2_2)_{\text{вещ}}=(T^3_3)_{\text{вещ}}=-P=-\frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсылая за подробностями вычислений к работам Дорошкевича (1965) и Зельдовича (1969), приведем здесь качественные соображения и выводы. Так как мы уже знаем по отдельности анизотропные решения только с обычной материей (§ 1) и только с магнитным полем (§ 2), то нетрудно получить их комбинацию.

Прежде всего, как мы видели в § 2, магнитное поле не допускает решения, в котором при $t\to 0$ имеется отрицательный показатель степени в зависимости масштабного фактора от времени вдоль направления поля. Это свойство сохраняется и в рассматриваемом комбинированном решении. Физический смысл этого свойства тот же, что и в § 2: если бы при $t\to 0$ уменьшались оба масштабных фактора в направлении, ортогональном полю, то плотность энергии поля $\varepsilon\sim\mathscr{H}^2$ стремилась бы к бесконечности быстрее, чем $1/t^2$, и тяготение, связанное с магнитным полем, изменило бы характер решения, переведя его на «вакуумное» с расширением при $t\to 0$ вдоль одного из направлений, ортогональных полю.

Конец вакуумной стадии определяется сравниванием одного из членов в правой части (18.3.2) — (18.3.5), т. е. $(T_i^k)_{\text{поля}}$ или $(T_i^k)_{\text{вещ}}$, с $1/t^2$. Если первым сравнивается с $1/t^2$ член $(T_i^k)_{\text{вещ}}$, связанный с обычным веществом, то это означает, что к концу вакуумной стадии плотность энергии магнитного поля меньше плотности энергии обычной материи и поле ни на какой стадии не оказывает влияния на динамику расширения. Решение совпадает с описанным в § 1.

Наконец, если первым сравнивается с $1/t^2$ член $(T_i^k)_{\text{поля}}$, связанный с магнитным полем, то поле существенно влияет на расширение. Оно переводит решение с одной вакуумной асимптотики на другую (см. § 2). Лишь после того, как вступают в игру силы тяготения, связанные с материей, решение изотропизуется и приближается к фридмановскому.

Рассмотрим теперь более подробно процесс изотропизации решения [Зельдович (1969)], а именно рассмотрим стадию, когда решение почти изотропно и влияние анизотропии поля мало. Для количественных оценок рассмотрим осесимметричное решение

$$ds^2=dt^2-a^2(t)\,((dx^1)^2+(dy^2)^2)-b^2(t)\,(dx^3)^2 \qquad (19.3.4)$$

(поле направлено по оси x^3).

Обозначим $\alpha=\dot a/a$, $\beta=\dot b/b$. Уравнения Эйнштейна имеют вид (принято $8\pi G=1$, $c=1$)

$$\left.\begin{aligned} &(a^2b)^{-1}\frac{d}{dt}(a^2b\alpha)=\frac{\varepsilon}{3}+\omega,\quad \omega=\frac{\mathscr{H}^2}{8\pi},\\ &(a^2b)^{-1}\frac{d}{dt}(a^2b\beta)=\frac{\varepsilon}{3}-\omega,\quad \varepsilon=\mathrm{const}\,(a^2b)^{-4/3},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \omega=\mathrm{const}\cdot a^{-4} \end{aligned}\right\} \qquad (19.3.5)$$

или, если избавиться от a и b,

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\alpha}+\alpha(2\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon}{3}+\omega, \quad \dot{\beta}+\beta(2\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon}{3}-\omega, \\ &\dot{\varepsilon}=-\frac{4}{3}(2\alpha+\beta)\varepsilon, \quad \dot{\omega}=-4\alpha\omega. \end{aligned}\right\} \tag{19.3.6}$$

В этих обозначениях изотропное решение есть

$$\alpha=\beta=(2t)^{-1}, \quad \omega=0, \quad \varepsilon=\frac{3}{4t^2}. \tag{19.3.7}$$

Выделим величину, характеризующую изотропное расширение: $n=\frac{2\alpha+\beta}{3}$ (такими бы были α и β при изотропном расширении). С другой стороны, выделим безразмерные величины, характеризующие анизотропию: $r=\frac{\alpha-\beta}{n}$ и $q=\frac{\omega}{\varepsilon}$.

После этого точные уравнения приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} &3\dot{n}+9n^2=\varepsilon(1+q), \\ &\dot{\varepsilon}=-4n\varepsilon, \\ &\dot{q}=-\frac{4}{3}rnq, \\ &r\dot{n}+n\dot{r}+3n^2r=2q\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{19.3.8}$$

Кроме того, имеет место еще одно соотношение, являющееся интегралом выписанных выше уравнений:

$$(2\alpha+\beta)^2-2\alpha^2-\beta^2=\varepsilon+\omega$$

или, в обозначениях r, n, q,

$$3n^2\left(1-\frac{5}{54}r^2\right)=\varepsilon(1+q). \tag{19.3.9}$$

Это соотношение следует из условия, что рассматривается мир трехмерно плоский (в изотропном случае это условие превращается в $\Omega=1$). Соотношение (19.3.9) является интегралом системы (19.3.8) и позволяет исключить одно из дифференциальных уравнений, например первое.

В принципе выписанная выше система уравнений (19.3.8) позволяет построить космологическое решение с любым наперед заданным магнитным полем и анизотропией расширения в данный момент и при данной плотности энергии ε.

Задавшись ε, q, r в произвольный момент t_0, находим соответствующее n из последней формулы и далее интегрируем уравнения (19.3.8) в прошлое и в будущее. Единственное ограничение заключается в том, что рассматривается лишь РД-период ($P=\varepsilon/3$, т. е.

$z>2\cdot 10^4$, $t>t_2\approx 10^{12}$ *сек*, см. гл. 6, § 1). Теперь от задачи о плоском мире с анизотропным расширением и магнитным полем перейдем к специфическому случаю слабого поля и малой анизотропии, $q<1$, $r<1$, и потребуем, чтобы эти условия выполнялись на протяжении всего интервала времени от некоторого момента t_1 до t_2. За начало интервала t_1 можно выбрать либо «планковское время» $t_1=10^{-43}$ *сек*, либо момент закалки равновесия между нейтронами и протонами $t_1=1$ *сек* (см. гл. 7). Выбор зависит от постановки задачи: требуем ли мы, чтобы мир на всем протяжении эволюции от «планковского момента» был максимально близок к решению Фридмана, был максимально упорядочен (в этом случае $t_1\approx 10^{-43}$ *сек*), или мы довольствуемся тем, что магнитное поле не влияет на предсказания теории относительно химического состава первичного вещества (в этом случае $t_1\approx 1$ *сек*).

Математически задача резко упрощается: плотность энергии ε и общая скорость расширения n по условию мало отличаются от изотропных: $n=1/2t$, $\varepsilon=3/4t^2$. Подставим эти величины в уравнения (19.3.8), считая r и q малыми. Получим

$$\dot r = -\frac{r}{2t}+\frac{3q}{t}, \qquad \dot q = -\frac{2}{3t}rq. \tag{19.3.10}$$

В отсутствие магнитного поля ($q=0$) анизотропия расширения быстро убывает: $r=r_0\sqrt{t_0/t}$. Магнитное поле «консервирует» анизотропию расширения подобно потокам нейтрино и гравитонов. Легко найти квазистационарное решение: очевидно, что при наличии магнитного поля r стремится не к нулю, а к тому значению, при котором $\dot r=0$, т. е. $r\to 6\,q$.

Подставим это значение r во второе уравнение (19.3.10), получим

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{4}{t}q^2, \quad q(t)=\frac{q_1}{1+4q_1\ln\left(\dfrac{t}{t_1}\right)}. \tag{19.3.11}$$

В итоге из (19.3.11) получаем неравенство $q(t_2)<\left(4\ln\dfrac{t_2}{t_1}\right)^{-1}$; таким образом,

$$\left.\begin{array}{llll} \text{для } t_1=10^{-43}\ \textit{сек}, & t_2=10^{12}\ \textit{сек} & q'(t_2)<2\cdot 10^{-3}, \\ \text{для } t_1=1\ \textit{сек}, & t_2=10^{12}\ \textit{сек} & q''(t_2)<10^{-2}. \end{array}\right\} \tag{19.3.12}$$

Отношение энергии магнитного поля к энергии $\varepsilon_{\text{рел}}$ реликтового излучения остается практически постоянным в ходе дальнейшей эволюции вплоть до настоящего времени. Поэтому из (19.3.12) и сегодняшнего значения $\varepsilon_{\text{рел}}$ получаем неравенства для сегодняшнего значения магнитного поля. Плотность энергии $\varepsilon_{\text{рел}}=4\times\times 10^{-13}$ *эрг/сек*; в двух вариантах q' и q'' получим для магнитного поля $\mathcal{H}'<1{,}5\cdot 10^{-7}$ *гс* и $\mathcal{H}''<3\cdot 10^{-7}$ *гс*.

Предполагаемое первичное (космологическое) магнитное поле существенно меньше — порядка 10^{-9}— 10^{-10} *гс*. Такая оценка следует из величины магнитного поля галактик, которая порядка 10^{-6} *гс*. Но плотность галактик в 10^5—10^6 раз больше средней плотности Вселенной. В простейшем случае изотропного сжатия поле возрастает пропорционально $\rho^{2/3}$, значит, поле галактик (даже без учета усиления его дифференциальным вращением и динамо-механизмами, см. § 7 гл. 14) в 10^3—10^4 раз больше первичного поля.

Итак, вывод заключается в том, что первичное космологическое магнитное поле, необходимое для объяснения магнитного поля галактик, «вписывается» в изотропную модель Фридмана, мало меняя все свойства модели на всем протяжении эволюции.

Легко убедиться также, что такое магнитное поле порядка 10^{-9}— 10^{-10} *гс* вызывает достаточно малую анизотропию расширения: соответствующее $q=5\cdot10^{-6}$—$5\cdot10^{-8}$. Следовательно, анизотропия расширения $r\sim3\cdot10^{-5}$—$3\cdot10^{-7}$ в РД-стадии. Позже, когда $\rho_{\text{вещ}}\gg\rho_{\text{изл}}$, стационарное значение r уменьшается, так как по порядку величины

$$r=\frac{6\varepsilon_{\text{вещ}}}{\varepsilon_{\text{изл}}+c^2\rho_{\text{вещ}}}=\frac{3\mathcal{H}^2}{4\pi\left(\varepsilon_{\text{изл}}+c\rho_{\text{вещ}}\right)}.$$

Анизотропия температуры реликтового излучения удобно выражается через параметр r. В самом деле, пусть мир стал прозрачен в момент t_0 и в этот момент температура равнялась T_0, излучение было изотропно. После этого получим: для лучей, распространяющихся вдоль осей x^1, x^2,

$$T'=T_0\frac{a_0}{a}=T_0e^{-\int\alpha\,dt};$$

вдоль оси x^3

$$T''=T_0\frac{b_0}{b}=T_0e^{-\int\beta\,dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{T'-T''}{T'}=\frac{e^{-\int\alpha\,dt}-e^{-\int\beta\,dt}}{e^{-\int\alpha\,dt}}=1-e^{-\int(\alpha-\beta)\,dt}=$$

$$=\int(\alpha-\beta)\,dt=\int rn\,dt=\int r\frac{1}{2t}\,dt=\frac{1}{2}\int r\,d\ln t.$$

Анизотропия реликтового излучения (соответствующая полю 10^{-9}— 10^{-10} *гс* в настоящее время) оказывается $\frac{\Delta T}{T}<10^{-6}$, т. е. далеко за пределами современной точности наблюдений и меньше, чем возможная анизотропия от других причин.

Таким образом, гипотеза первичного магнитного поля не противоречит наблюдениям, так же как она не противоречит предположению о почти фридмановском выходе из сингулярности (т. е. предположению, что и при $t=10^{-43}$ *сек* расширение практически фридмановское). Скептическое отношение к этой гипотезе и желание обойтись без первичного поля, желание объяснить поле галактик динамо-механизмом — все это связано с интуитивными, почти что эстетическими мотивами и с предвидением будущей теории сингулярности. Кажется невероятным, чтобы в этой будущей теории спонтанно появилось магнитное поле, нарушающее симметрию правого и левого. Впрочем, нужно помнить шаткость и субъективность таких эстетических критериев!

§ 4. Возмущения в анизотропной однородной Вселенной

В предыдущем разделе были рассмотрены вопросы, связанные с флуктуациями в изотропной и однородной модели Фридмана. Однако если начальные стадии космологического расширения были не фридмановские, то, естественно, и законы роста флуктуаций были иными.

В этом параграфе рассматривается космологическая задача о росте возмущений плотности в расширяющейся материи, в среднем покоящейся относительно синхронной системы отсчета, а также изменение амплитуды гравитационных и акустических волн [Лифшиц, Халатников (1963а, б), Дорошкевич (1966), Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1971)].

В разделе о гравитационной неустойчивости фридмановского мира было подробно показано, что при джинсовской неустойчивости причиной роста возмущений плотности является самогравитация возмущений: более плотные комки материи обладают бóльшими полями тяготения, что и вызывает их рост.

Рост возмущений в анизотропном мире носит совсем иной характер.

Цель данного параграфа показать, что рост возмущений плотности материи в анизотропной расширяющейся Вселенной на вакуумной стадии существует, но является кинематическим эффектом, обусловленным движением вещества в гравитационном поле, описываемом решением уравнений тяготения для пустого пространства, и найти законы роста возмущений плотности материи. Ясное понимание процесса роста флуктуаций позволяет продвинуться и в рассмотрении конечной, не малой неоднородности плотности в некоторых частных случаях.

Рассмотрение неоднородных возмущений (т. е. возмущений, зависящих от координат) в анизотропной однородной Вселенной представляет большой интерес.

Такое рассмотрение можно считать первым приближением к решению общей задачи о неизотропной и неоднородной Вселенной. Нелинейность уравнений ОТО, сложность физических процессов и