жению о почти фридмановском выходе из сингулярности (т. е. предположению, что и при $t=10^{-43}$ *сек* расширение практически фридмановское). Скептическое отношение к этой гипотезе и желание обойтись без первичного поля, желание объяснить поле галактик динамо-механизмом — все это связано с интуитивными, почти что эстетическими мотивами и с предвидением будущей теории сингулярности. Кажется невероятным, чтобы в этой будущей теории спонтанно появилось магнитное поле, нарушающее симметрию правого и левого. Впрочем, нужно помнить шаткость и субъективность таких эстетических критериев!

## § 4. Возмущения в анизотропной однородной Вселенной

В предыдущем разделе были рассмотрены вопросы, связанные с флуктуациями в изотропной и однородной модели Фридмана. Однако если начальные стадии космологического расширения были не фридмановские, то, естественно, и законы роста флуктуаций были иными.

В этом параграфе рассматривается космологическая задача о росте возмущений плотности в расширяющейся материи, в среднем покоящейся относительно синхронной системы отсчета, а также изменение амплитуды гравитационных и акустических волн [Лифшиц, Халатников (1963а, б), Дорошкевич (1966), Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1971)].

В разделе о гравитационной неустойчивости фридмановского мира было подробно показано, что при джинсовской неустойчивости причиной роста возмущений плотности является самогравитация возмущений: более плотные комки материи обладают бóльшими полями тяготения, что и вызывает их рост.

Рост возмущений в анизотропном мире носит совсем иной характер.

Цель данного параграфа показать, что рост возмущений плотности материи в анизотропной расширяющейся Вселенной на вакуумной стадии существует, но является кинематическим эффектом, обусловленным движением вещества в гравитационном поле, описываемом решением уравнений тяготения для пустого пространства, и найти законы роста возмущений плотности материи. Ясное понимание процесса роста флуктуаций позволяет продвинуться и в рассмотрении конечной, не малой неоднородности плотности в некоторых частных случаях.

Рассмотрение неоднородных возмущений (т. е. возмущений, зависящих от координат) в анизотропной однородной Вселенной представляет большой интерес.

Такое рассмотрение можно считать первым приближением к решению общей задачи о неизотропной и неоднородной Вселенной. Нелинейность уравнений ОТО, сложность физических процессов и математические трудности приводят к тому, что прямое решение общей задачи в настоящее время невозможно. Приходится приобретать сведения о характере решения, рассматривая частные случаи, среди которых почетную роль играют точные решения — как правило, вырожденные, например обладающие инвариантностью типа сферической симметрии, т. е. группой поворота, или пространственной однородностью, т. е. группой сдвига.

Слабовозмущенные точные решения образуют множество гораздо большей мощности (совпадающей с мощностью общего решения), так как возмущения снимают вырождение и не обладают инвариантностью точных решений. Вместе с тем пока возмущения малы, они удовлетворяют линейным уравнениям и после фурье-разложения по пространству приводят к обыкновенным дифференциальным уравнениям для фурье-амплитуд. Поэтому задачи о малых возмущениях соединяют математическую простоту и обозримость решений с большой общностью начальных условий.

Ниже будут рассмотрены малые возмущения плотности материи на фоне расширяющейся плоской анизотропной модели Вселенной. Физическая интерпретация результатов, показывающая, что рост возмущений есть кинематический эффект, может быть полезна при рассмотрении более сложных случаев, в частности задачи об эволюции возмущений на стадии конечной (не малой) неоднородности плотности и конечных возмущений скорости.

Рассмотрим анизотропную однородную модель с обычным веществом. Как уже неоднократно отмечалось, на ранней вакуумной стадии расширения анизотропного мира тяготение вещества не играет роли.

Дадим ньютоновское описание ситуации. Локально наблюдатель чувствует приливные силы, по сравнению с которыми гравитационное взаимодействие соседних объемов пренебрежимо мало. Элемент объема сопутствующей системы координат сжимается по одной оси и расширяется по двум другим осям, так как в общем невырожденном случае для показателей степени ($p_1$, $p_2$, $p_3$) масштабных факторов $a\sim t^{p_1}$, $b\sim t^{p_2}$, $c\sim t^{p_3}$ вдоль трех осей имеем

$$-\frac{1}{3}<p_1<0<p_2<\frac{2}{3}<p_3<1. \qquad (19.4.1)$$

Для удобства в дальнейшем обозначим $p_1=-\alpha; 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{3}$. Рассмотрим сперва частицы, покоящиеся в сопутствующих координатах, т. е. с постоянными $x^1=\xi$, $x^2=\eta$, $x^3=\zeta$. Их «лабораторные» координаты суть

$$x=a\xi, \quad y=b\eta, \quad z=c\zeta.$$

Возьмем пары частиц, расположенные по той или иной оси, например $\xi_1$, 0, 0 и $\xi_2$, 0, 0 или 0, $\eta_1$, 0 и 0, $\eta_2$, 0.

Их относительное ускорение равно

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_{12}}{dt^2}&=p_1(p_1-1)\,t^{-2}x_{12}=\alpha(\alpha+1)\,t^{-2}x_{12}=\frac{\ddot a}{a}\,x_{12},\\ \frac{d^2y_{12}}{dt^2}&=-p_2(1-p_2)\,t^{-2}y_{12}=\frac{\ddot b}{b}\,y_{12};\\ \frac{d^2z_{12}}{dt^2}&=-p_3(1-p_3)\,t^{-2}z_{12}=\frac{\ddot c}{c}\,z_{12}.\end{aligned}\right\}\qquad(19.4.2)$$

В ньютоновской интерпретации такое относительное ускорение свидетельствует о действии гравитационного потенциала, удовлетворяющего условиям

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\frac{\ddot a}{a},\qquad \frac{d^2\varphi}{dy^2}=-\frac{\ddot b}{b},\qquad \frac{d^2\varphi}{dz^2}=-\frac{\ddot c}{c}.$$

В общем случае, согласно (18.3.5), получим $\Delta\varphi=\frac{4\pi G}{c^2}(\varepsilon+T^\alpha_\alpha)$, в нерелятивистском веществе $T^\alpha_\alpha\ll\varepsilon$, $\frac{\varepsilon}{c^2}=\rho$, $\Delta\varphi=4\pi G\rho$. На вакуумной стадии отдельные члены вида $\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|\gg\Delta\varphi$, можно поэтому положить $\Delta\varphi=0$. Поскольку $\Delta\varphi=0$, что соответствует уравнению Ньютона для пустоты, локальный наблюдатель может считать, что силы тяготения не связаны с присутствующей материей, и в этом смысле их можно назвать приливными. С точки зрения релятивистской теории гравитационное поле в данной модели является свободным гравитационным полем типа гравитационной волны бесконечно большой длины; это поле не имеет своим источником вещество.

Приливные силы расталкивают покоящиеся в данной системе отсчета частицы по оси $x$ (замедляя сжатие) и стягивают сопутствующие частицы по осям $y$ и $z$ (замедляя расширение). Частицы, движущиеся с произвольной скоростью, испытывают те же гравитационные силы, во всяком случае пока скорость их нерелятивистская.

Обратимся теперь к возмущениям в рассматриваемой модели. Рассматривается казнеровская вакуумная стадия, поскольку последующая стадия быстро переходит в тривиальную фридмановскую модель, и поведение в ней возмущений известно. Как уже упоминалось, на вакуумной стадии гравитационное взаимодействие вещества не играет роли в поведении возмущений точно так же, как оно не играет роли в невозмущенном движении. Покажем это, т. е. покажем, что самогравитация материи не приводит к заметному росту неоднородности. Приближенную оценку роли гравитационного взаимодействия материи получим, взяв мгновенное значение инкремента по формуле Джинса (см. гл. 9) $\left(\delta=\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$:

$$\frac{d\ln\delta}{dt}=\sqrt{4\pi G\rho},\qquad \delta\sim\exp\int\sqrt{4\pi G\rho}\,dt.\qquad(19.4.3)$$

Подставим в (19.4.3) зависимость $\rho$ от $t$ на вакуумной стадии (см. § 1 этой главы).

В случае пыли подставим $\rho=\rho_{\text{вещ}}$, в случае излучения $\rho=\rho_{\text{изл}}$ по формулам $\rho_{\text{вещ}}=At^{-1}$, $\rho_{\text{изл}}=Bt^{-4/3}$. Константы $A$ или $B$ выразим через момент изотропизации $\theta_1$ выхода на решение Фридмана. О том, как это делается, сказано в § 1 этой главы. Используя формулу вида (19.1.1), получаем

$$A\theta_1^{-1}=(6\pi G\theta_1^2)^{-1}, \qquad B\theta_1^{-4/3}=3\,(32\pi G\theta_1^2)^{-1}.$$

Подставим теперь $\rho=\rho(t)$ в (19.4.3) с найденными значениями констант и проинтегрируем полученные выражения от нуля до $\theta_1$. В результате найдем, что за время от сингулярности ($t=0$) до $\theta_1$ возмущение $\delta$ возрастает на конечную величину:

$$\int_0^{t_1}\sqrt{4\pi G\rho}\,dt=2\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{для} \quad \rho=\rho_{\text{вещ}} \quad \text{и} \quad \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{для} \quad \rho=\rho_{\text{изл}}. \tag{19.4.4}$$

В изотропном мире такой интеграл расходится вблизи нуля. Сравнивая бесконечное значение интеграла в изотропном мире и конечное значение интеграла, т. е. конечный вклад гравитационного взаимодействия $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right.$ или $\left.\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, в анизотропном мире, можно сделать вывод о том, что гравитационное действие на возмущение несущественно. При отсутствии гравитационного взаимодействия невозможно говорить о гравитационной неустойчивости однородного мира.

Однако это, конечно, не означает, что и все возмущения не нарастают в анизотропном мире. Мы доказали только, что причиной роста возмущений не может быть гравитация материи. Как мы сейчас покажем, в вакуумном периоде имеются нарастающие возмущения, причем закон этого нарастания даже более сильный по сравнению с нарастанием возмущений за счет джинсовской гравитационной неустойчивости в изотропной модели Фридмана.

Рост возмущений в анизотропной модели имеет существенно иную, не джинсовскую природу. Этот рост связан со сжатием по одной из осей ($x^1$).

Будем говорить сейчас о случае $P=0$ (пылевидное вещество). Пусть какие-либо частицы пыли обладают малой пекулярной скоростью относительно системы отсчета $x^1$, $x^2$, $x^3$. Обозначим эту скорость через $\boldsymbol{v}$. Тяготение, связанное с возмущением плотности, как мы уже выяснили, несущественно. Поэтому скорость частицы будет меняться, как скорость пробной частицы в невозмущенном решении. Для изменения скорости пробной частицы в невозмущенном решении применимы все рассуждения § 1 гл. 3. Каждая составляющая скорости по осям $x^1$, $x^2$, $x^3$ меняется обратно пропорционально (соответственно) $a$, $b$, $c$. Составляющие по $x^2$ и $x^3$ затухают, но $v_{x^1}\sim a^{-1}\sim t^{\alpha}$ и, следовательно, нарастает. Это нарастание и обусловливает рост флуктуаций плотности. Движения же по координатам $x^2$ и $x^3$ затухают, не ведут к нарастанию плотности, и их поэтому можно не учитывать.

Для определения скорости роста плотности найдем, как меняется объем вещества, а для этого прежде всего определим, как меняется координата частицы из-за наличия $v_{x^1}$. Физическая скорость $v_{x^1}=a\frac{dx^1}{dt}$. Величина $a\sim t^{-\alpha}$, а $v_{x^1}\sim t^{\alpha}$; следовательно, $\frac{dx^1}{dt}\sim t^{2\alpha}$ и $x^1=x_0+Dt^{1+2\alpha}$. Объем вещества благодаря этому движению меняется иначе, чем в невозмущенном решении. Это отклонение $\frac{\Delta V}{V}\sim t^{1+2\alpha}$, где $V$ — объем в невозмущенном решении. Отсюда окончательно для растущей моды возмущения плотности находим

$$\delta(t)\equiv\frac{\Delta\rho}{\rho}\sim t^{1+2\alpha}. \tag{19.4.5}$$

Имея в виду, что $0<\alpha\leqslant 1/3$, мы видим, что при падении плотности в $n$ раз возмущения возрастают в $n^{1+2\alpha}$, т. е. в $n^1$—$n^{5/3}$ раз. В изотропной модели с пылью было $\delta\sim t^{2/3}$, $\rho\sim t^{-2}$, $\delta\sim\rho^{-1/3}$, т. е. соответствующий рост возмущения происходил только в $n^{1/3}$ или в 3—5 раз медленнее, чем в анизотропном случае.

Рассмотрим теперь другой тип возмущений в анизотропной модели.

Когда рассматриваются короткие волны в упругой среде (например, в релятивистском газе с $P=\varepsilon/3$) или короткие гравитационные волны (так что длина волны $l\ll ct$), то изменение их амплитуды связано, в силу адиабатической инвариантности, с изменением длины волны и частоты. Длина волны уменьшается и частота увеличивается, если распространение волны происходит вдоль оси $x^1$. Видно, что распространение вдоль оси $x^1$, так же как и движение пыли вдоль $x^1$ в предыдущем примере, не является исключительным случаем. В силу чисто геометрических причин при произвольном начальном волновом векторе (с компонентами $k_{0x}\approx k_{0y}\approx k_{0z}$ одного порядка в момент $t=t_0$) с течением времени происходит рост $k_x$ и уменьшение $k_y$ и $k_z$. Направление распространения любой волны приближается к оси $x$.

Таким образом, асимптотически волновой вектор направлен по оси $x$ и растет со временем пропорционально $t^{\alpha}$. Скорость гравитационных волн постоянна и равна $c$. Скорость упругих волн в высокотемпературной плазме (в газе с $P=\varepsilon/3$) также постоянна и равна $c/\sqrt{3}$. Следовательно, в обоих случаях частота растет пропорционально $k\sim t^{\alpha}$; из адиабатической инвариантности следует, что растет, как $t^{\alpha}$, и энергия гравитационных и упругих волн, заключенная в данном сопутствующем объеме. Сопутствующий объем растет в невозмущенном решении Казнера как $t$.

Плотность энергии гравитационных волн пропорциональна $\left(\frac{dh}{dx}\right)^2$, где $h$ — безразмерное возмущение метрики: $dx^2 \to (1+h)\,dx^2$. Окончательно получим $h \sim t^{-(1+\alpha)/2}$; отношение плотности энергии гравитационных волн к плотности энергии плазмы растет, как $t^{1/2+\alpha}$; в изотропном мире это отношение оставалось постоянным*).

Для упругих (акустических) волн $\varepsilon \approx \rho c^2 \delta^2$; относительная амплитуда коротких волн ($l \ll ct$), к которым применима адиабатическая инвариантность, растет с течением времени, как $t^{\alpha/2}$; в изотропном мире эта амплитуда была постоянной.

Действуя тем же методом, т. е. пренебрегая гравитационным влиянием вещества, легко рассчитать и развитие длинноволновых ($\lambda \gg ct$) возмущений в среде с $P=\varepsilon/3$. В этом случае можно пренебречь градиентами давления и границы объемов возмущения движутся как свободные частицы. Рассуждения здесь полностью аналогичны случаю $P=0$, только теперь плотность связана с объемом соотношением $\rho \sim V^{-4/3}$. Получаем для наиболее быстро нарастающей моды возмущений плотности

$$\delta = \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim t^{4/3+2\alpha} \sim \varepsilon^{-(1+3/2\alpha)} \tag{19.4.6}$$

вместо $\delta \sim \varepsilon^{-1}$ в модели Фридмана. Интересно заметить, что поведение абсолютных значений возмущений плотности не зависит от уравнения состояния вещества (в пределе длинных волн); для $P=0$ и для $P=\varepsilon/3$ имеем

$$\rho\delta\,|_{P=0} = \varepsilon\delta\,|_{P=\varepsilon/3} = t^{2\alpha}.$$

Следует также отметить, что, рассматривая движение вещества на фоне невозмущенной метрики, мы не можем описать некоторые типы возмущений, а именно возмущения свободного гравитационного поля модели, т. е. того поля, на фоне которого рассматривается движение вещества. Как мы уже отмечали, это общее поле можно рассматривать как гравитационную волну бесконечно большой длины. Ясно, что для гравитационных возмущений с большой длиной волны ($\lambda \gg ct$) метод адиабатических инвариантов (применяемый выше для анализа волн с $\lambda \ll ct$) неприменим. Такие возмущения всего поля рассмотрены в работе Лифшица и Халатникова (1963а, б). Они также приводят к возмущениям плотности и скорости (за исключением особых случаев, связанных с симметрией задачи). Однако эти моды при расширении нарастают более медленно и не являются главными.

*) Напомним, что предполагается плазма с $P=\varepsilon/3$ — с достаточно частыми столкновениями частиц, так что изотропия их распределения и закон Паскаля не нарушаются.

В этом параграфе не рассматриваются другие, более тонкие вопросы, например превращение поперечных волн в продольные. Мы отсылаем за подробностями к работе Дорошкевича (1966).

Сформулируем кратко выводы:

1. В анизотропной космологической модели на ранней стадии рост возмущений — движение вещества и распространение волн — может быть рассмотрен без учета самогравитации вещества, в соответствии с общим выводом о «вакуумности» этой стадии эволюции.

2. Получен закон роста малых возмущений и общее решение для конечных возмущений с давлением, равным нулю. Возмущения растут в 3—5 раз быстрее $\left[\left|\frac{d\ln\delta}{d\ln\rho}\right|_{\text{аниз}}=(3-5)\left|\frac{d\ln\delta}{d\ln\rho}\right|_{\text{изотр}}\right]$ по сравнению с изотропной моделью.

3. Объяснены законы изменения амплитуды коротких гравитационных и упругих (акустических) волн.

4. Получен закон роста длинноволновых возмущений в среде с $P=\varepsilon/3$. Возмущения растут в 2—3 раза быстрее, чем в изотропной модели.

## § 5. Неустойчивость космологических решений относительно возникновения движения всего вещества

До сих пор предполагалось, что вещество все время в среднем покоится относительно системы отсчёта модели, т. е. все $\frac{dx^\alpha}{dt}\equiv 0$. Посмотрим, устойчиво ли такое решение.

В предыдущем параграфе было рассмотрено возникновение локальных флуктуаций с $\lambda\ll ct$ и показана их «кинематическая» природа (в смысле несущественности самогравитации флуктуаций). В этом параграфе будет показано, что анизотропная модель неустойчива в том же приближении (без обратного влияния) и относительно возникновения однородного движения всего вещества в целом, т. е. относительно возмущения с $\lambda\gg ct$.

Как и для всякой неустойчивости, в данной задаче нарастают разные моды в зависимости от того, рассматривается ли сжатие всего вещества (коллапс) или расширение (космологическая задача). Для коллапса подобная задача была рассмотрена Лифшицем и Халатниковым (1960, 1963а, б), космологическая задача рассмотрена Новиковым (1970) на основе результатов Лифшица и Халатникова.

Здесь будет рассмотрена космологическая задача; задачу о коллапсе можно найти у Ландау и Лифшица (1973).

Будем рассматривать вакуумную стадию. Наличие материи не влияет на решение, метрика записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} ds^2&=dt^2-t^{2p_1}(dx^1)^2-t^{2p_2}(dx^2)^2-t^{2p_3}(dx^3)^2,\\ p_1+p_2+p_3&=p_1^2+p_2^2+p_3^2=1.\end{aligned}\right\}\qquad(19.5.1)$$