В этом параграфе не рассматриваются другие, более тонкие вопросы, например превращение поперечных волн в продольные. Мы отсылаем за подробностями к работе Дорошкевича (1966).

Сформулируем кратко выводы:

1. В анизотропной космологической модели на ранней стадии рост возмущений — движение вещества и распространение волн — может быть рассмотрен без учета самогравитации вещества, в соответствии с общим выводом о «вакуумности» этой стадии эволюции.

2. Получен закон роста малых возмущений и общее решение для конечных возмущений с давлением, равным нулю. Возмущения растут в 3—5 раз быстрее $\left[\left|\frac{d\ln\delta}{d\ln\rho}\right|_{\text{аниз}}=(3-5)\left|\frac{d\ln\delta}{d\ln\rho}\right|_{\text{изотр}}\right]$ по сравнению с изотропной моделью.

3. Объяснены законы изменения амплитуды коротких гравитационных и упругих (акустических) волн.

4. Получен закон роста длинноволновых возмущений в среде с $P=\varepsilon/3$. Возмущения растут в 2—3 раза быстрее, чем в изотропной модели.

§ 5. Неустойчивость космологических решений относительно возникновения движения всего вещества

До сих пор предполагалось, что вещество все время в среднем покоится относительно системы отсчета модели, т. е. все $\frac{dx^\alpha}{dt}\equiv 0$. Посмотрим, устойчиво ли такое решение.

В предыдущем параграфе было рассмотрено возникновение локальных флуктуаций с $\lambda\ll ct$ и показана их «кинематическая» природа (в смысле несущественности самогравитации флуктуаций). В этом параграфе будет показано, что анизотропная модель неустойчива в том же приближении (без обратного влияния) и относительно возникновения однородного движения всего вещества в целом, т. е. относительно возмущения с $\lambda\gg ct$.

Как и для всякой неустойчивости, в данной задаче нарастают разные моды в зависимости от того, рассматривается ли сжатие всего вещества (коллапс) или расширение (космологическая задача). Для коллапса подобная задача была рассмотрена Лифшицем и Халатниковым (1960, 1963а, б), космологическая задача рассмотрена Новиковым (1970) на основе результатов Лифшица и Халатникова.

Здесь будет рассмотрена космологическая задача; задачу о коллапсе можно найти у Ландау и Лифшица (1973).

Будем рассматривать вакуумную стадию. Наличие материи не влияет на решение, метрика записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} ds^2&=dt^2-t^{2p_1}(dx^1)^2-t^{2p_2}(dx^2)^2-t^{2p_3}(dx^3)^2,\\ p_1+p_2+p_3&=p_1^2+p_2^2+p_3^2=1.\end{aligned}\right\}\qquad(19.5.1)$$

Предположим теперь, что в некоторый начальный момент времени t_0 есть определенная (малая) скорость всего вещества. Посмотрим, как будет двигаться материя в момент времени $t \gg t_0$. Так как рассматриваются ранние стадии расширения, то уравнение состояния полагается равным $P=\varepsilon/3$. Уравнения движения вещества записываются в виде [см. Ландау, Лифшиц (1973), стр. 412]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,\varepsilon^{3/4}u^i\right)=0,\\ &(P+\varepsilon)\,u^k\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k}-\frac{1}{2}u^l\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial P}{\partial x^i}-u_iu^k\frac{\partial P}{\partial x^k};\end{aligned}\right\} \tag{19.5.2}$$

здесь u^i— четырехмерная скорость.

Нас интересуют сейчас возмущения длинноволнового типа ($\lambda \gg ct$), т. е. все производные по пространству в системе отсчета (19.5.1), меньше, чем по времени. Таким образом, мы рассматриваем однородное возмущение скорости всего вещества. Если величины в (19.5.2) зависят только от времени, то уравнения легко интегрируются. Считаем, что в начальный момент времени t_0 все физические компоненты скорости одного порядка. Рассматривается расширение модели. При $t \gg t_0$ решение системы (19.5.2) дает для главных членов по степеням t (p_1— наименьший показатель)

$$\varepsilon=\varepsilon_{(0)}t^{-2(1-p_1)}, \qquad u_\alpha=u_{\alpha\,(0)}t^{(1-p_1)/2}. \tag{19.5.3}$$

Из решения (19.5.3) и тождества $u_iu^i=1$ следует, что

$$u_0=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\sim t^{\frac{1-3p_1}{2}}.$$

Здесь v — модуль трехмерной скорости, выраженный в единицах скорости света. Таким образом, скорость стремится к световой по закону

$$\sqrt{1-v^2}\sim t^{\frac{3p_1-1}{2}}. \tag{19.5.4}$$

Найдем компоненты трехмерной физической скорости *) по разным осям координат. Эти компоненты в данном случае суть

$$v^{(\alpha)}=\frac{u_\alpha\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}. \tag{19.5.5}$$

Из (19.5.5), подставляя (19.5.3), (19.5.4) и $g_{\alpha\alpha}$ из (19.5.1), находим, что в первом порядке

$$v^{(1)}\approx 1, \qquad v^{(2)}\sim t^{-(p_2-p_1)}, \qquad v^{(3)}\sim t^{-(p_3-p_1)}. \tag{19.5.6}$$

---

*) Это компоненты, которые измеряет локальный наблюдатель, покоящийся в системе отсчета. Во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что это определение не совпадает с данным у Ландау и Лифшица (1973) на стр. 323, где вводятся координатные компоненты 3-скорости.

Для $v^{(1)}$ более точно можно написать $v^{(1)}=1-\mathrm{const}\cdot t^{3p_1-1}$. Таким образом, $v^{(1)}\gg v^{(2)}$, $v^{(3)}$ и скорость стремится к световой вдоль оси x^1, по которой происходит сжатие системы отсчета. Выражения (19.5.3), (19.5.4) и (19.5.6) описывают релятивистскую стадию движения. Эти выражения показывают неустойчивость решения относительно однородного возмущения скорости. Начальные стадии развития такой неустойчивости, когда $v/c\ll 1$, не описываются соотношениями (19.5.3) и были получены в предыдущем параграфе.

Вернемся к релятивистской стадии неустойчивости. Обратим внимание на то обстоятельство, что все рассмотрение проводится в системе, относительно которой материя движется с релятивистской скоростью. Это ведет к двум важным следствиям.

Во-первых, собственное время τ в сопутствующей системе отсчета (движущейся вместе с материей) отличается от времени t системы (19.5.1). Связь между временами находится из релятивистского соотношения

$$d\tau=dt\sqrt{1-v^2}. \tag{19.5.7}$$

Используя (19.5.4), находим

$$\tau\sim t^{\frac{3p_1+1}{2}}.$$

Подставляя это выражение в (19.5.3), получаем для плотности энергии

$$\varepsilon\approx\tilde{\varepsilon}_0\tau^{\frac{-4(1-p_1)}{3p_1+1}}. \tag{19.5.8}$$

Во-вторых, события, одновременные в системе отсчета (19.5.1), не одновременны в сопутствующей системе. В системе (19.5.1) нет пространственных градиентов плотности и давления — мы выбрали однородное решение. Однако пространственная неоднородность появляется в сопутствующей системе отсчета из-за относительности одновременности. Наличие градиентов давления в сопутствующей системе отсчета ведет к тому, что деформация вещества зависит от уравнения состояния. Поэтому материя с разными уравнениями состояния набирает скорость относительно системы (19.5.1) по разным законам, что легко видеть из уравнений (19.5.2). Например, для пыли с уравнением состояния $P=0$ из (19.5.2) сразу получаем $u_\alpha=\mathrm{const}$, что отличается от (19.5.3), полученного для $P=\varepsilon/3$.

Для пыли ($P=0$) изменение компонент скорости вещества в системе (19.5.1) есть чисто кинематический эффект и физическая компонента импульса вдоль данной оси обратно пропорциональна масштабному фактору вдоль этой оси. Поэтому скорость всегда растет вдоль оси, по которой происходит сжатие, и убывает вдоль осей, по которым происходит расширение.

При наличии давления картина осложняется градиентами сил давления в сопутствующей системе, и иногда эффект этих сил может превалировать над кинематическим эффектом. Для демонстрации сказанного рассмотрим случай, когда уравнение состояния вещества $P=\varepsilon/3$, а скорость движения направлена строго вдоль одной из осей (назовем ее α). Остальные компоненты скорости тождественно равны нулю. Тогда справедливо решение (19.5.3) и соотношение (19.5.4), только p_1 может принимать любые значения — от $-{}^1/_3$ до 1 в зависимости от того, по какой из осей направлена скорость.

Если бы в росте скорости играл роль только кинематический эффект, физическая скорость росла бы для отрицательных значений p_1 и убывала для положительных. Это действительно имеет место для пыли. Однако из (19.5.4) видно, что в рассматриваемой задаче с $P=\varepsilon/3$ критическим для роста скорости является не нулевое значение показателя, а $p_1={}^1/_3$.

Таким образом, даже если движение направлено вдоль расширяющейся оси, но расширяющейся не слишком быстро ($p_1<{}^1/_3$), скорость релятивистского газа относительно однородной системы отсчета растет. Это обстоятельство важно для космологических задач.

Вернемся теперь к тем исходным предположениям, в которых рассматривалась задача.

Первое замечание связано с предположением о том, что материя не оказывает обратного влияния на решение для метрики, т. е. рассматривалась вакуумная стадия. Это предположение справедливо лишь со следующей оговоркой: Мы рассматривали до сих пор метрику вида (18.3.1), в которой трехмерное пространство плоское, все $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\equiv 0$ ($\alpha=1, 2, 3$). Для такой метрики все $R_0^\alpha\equiv 0$, а значит, и $T_0^\alpha\equiv 0$, так как $R_0^\alpha=\varkappa T_0^\alpha$ ($\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна). Таким образом, метрика вида (18.3.1) не допускает движения вещества в системе отсчета. Следовательно, строго говоря, движение вещества должно предполагать искривление трехмерного пространства однородной системы отсчета. Если это искривление не влияет на эволюцию модели вблизи сингулярности, $t=0$, то оно не влияет и на движение материи, пока расстояния, пройденные материей, малы по сравнению с радиусом кривизны трехмерного пространства. В этом случае все изложенное выше справедливо как первое приближение на вакуумной стадии, хотя и надо помнить, что трехмерное пространство искривлено. Мы увидим в гл. 21, при каких типах искривления трехмерного пространства сингулярность при $t\to 0$ действительно имеет описанный выше «казнеровский» характер с $a\sim t^{p_1}$, $b\sim t^{p_2}$, $c\sim t^{p_3}$ и справедлив проделанный анализ.

При некоторых типах искривления трехмерного пространства (см. гл. 21) кривизна коренным образом меняет характер решения для $g_{\mu\nu}$ вблизи сингулярности, $t\to 0$ [Белинский, Лифшиц, Халатников (1970)]. Решение носит осцилляционный характер и не описывается простыми степенными формулами вида (19.5.1). Хотя в таких решениях имеется неустойчивость, аналогичная описанной выше, но характер эволюции будет, разумеется, иным.

Второе замечание относится к предположению об однородности скорости в очень большом масштабе, $\lambda \gg ct$. Если это условие выполнено в некоторый момент для фиксированного лагранжева масштаба, то оно с течением времени будет нарушено. Тогда в уравнениях (19.5.2) члены с пространственными координатами будут играть основную роль и изменят характер решения. Таким образом, всегда надо помнить об ограниченности применения полученного решения со стороны будущего времени. Разумеется, вакуумные решения во всех случаях ограничены во времени, о чем подробно говорилось выше.

Наконец, в заключение отметим следующее. Мы предполагали, что в некоторый начальный момент t_0 все компоненты скорости одного порядка. Момент t_0 может быть моментом возникновения флуктуации скорости или может совпадать с $t_g = 10^{-43}$ *сек* — минимальным временем, возможным в неквантовой космологии (подробнее см. V раздел). Сделанное предположение о компонентах скорости тогда кажется разумным. Однако если стать на точку зрения неограниченной применимости уравнений ОТО вплоть до сингулярности, $t \to 0$, то из предположения об отличии всех компонент скорости материи от нуля в некоторый момент t_0 следует, что наибольшей при $t \to 0$ была компонента скорости вдоль оси, по которой происходит наиболее быстрое расширение (показатель степени положительный и наибольший). Тогда мы приходим вблизи $t=0$ к картине релятивистского движения вещества вдоль оси z; скорость движения затухает по мере расширения. Мы не будем подробнее останавливаться на этом *), так как неограниченная применимость ОТО при $t \to 0$ представляется неправомерной. При столь пекулярных начальных условиях для скорости (релятивистское движение вдоль z при $t \to 0$) требовалось бы специальное обоснование. Однако при рассмотрении коллапса, в отличие от космологической задачи, такое поведение вещества (движение вещества вдоль оси с наибольшим положительным показателем степени в зависимости от времени), конечно, необходимо.

---

*) См. об этом в работе Лифшица и Халатникова (1963а, б); конкретные модели построены в работе Грищука, Дорошкевича, Новикова (1968).