ГЛАВА 21

ОБЩИЙ АНАЛИЗ ОДНОРОДНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

§ 1. Понятие однородности космологической модели

До сих пор рассматривались анизотропные космологические модели с трехмерным евклидовым (плоским) пространством. Такое пространство заведомо однородно по своим геометрическим свойствам. В этом пространстве рассматривалось простейшее однородное распределение и движение материи. Однако такие простейшие модели далеко не исчерпывают все возможные типы однородных (но анизотропных, вообще говоря) пространств.

Мы переходим к систематическому рассмотрению других, более сложных случаев.

Понятие пространственной однородности интуитивно кажется очевидным: требуется «одинаковость» свойств модели во всех точках трехмерного пространства в фиксированный момент времени.

Во всех точках должны быть одинаковы как геометрические свойства трехмерного пространства (его кривизна), так и деформация пространства с течением времени, его вращение, распределение и движение в нем материи.

Ясно, что понятие однородности связано с выбором системы отсчета. Если свойства однородности выполнены в некоторый системе отсчета, то переход к другой системе нарушит эти свойства. Таким образом, вопрос — однородна ли модель, заключается в том, существует ли такая система отсчета, в которой выполнены условия однородности.

Попытаемся дать математическую формулировку свойства однородности.

В математике понятие однородности пространства давно исследовано [см., например, книгу Эйзенхарта (1947)]. В применении к ОТО и космологии это понятие также исследовано многими авторами.

Сошлемся здесь на работы Тауба (1951), Зельманова (1959б), Петрова (1966), Гекмана и Шюкинга (1962), Шюкинга и Гекмана (1958), Хоукинга и Эллис (1973), Дорошкевича (1968), Белинского, Лифшица и Халатникова (1970), Грищука (1967а, в).

Остановимся сначала только на геометрических свойствах трехмерного пространства, важных для рассмотрения однородных моделей. Геометрические свойства трехмерного пространства в двух областях, скажем в окрестностях точек A и B, будут одинаковы, если возможно в каждой из этих окрестностей выбрать координатные сетки x и x^* соответственно так, чтобы метрические тензоры были одинаковы, т. е. чтобы функциональная зависимость $g_{\alpha\beta}(x)$ от x^1, x^2, x^3 в окрестности точки A была точно такая же, как $g_{\alpha\beta}(x^*)$ от x^{*1}, x^{*2}, x^{*3} в окрестности точки B.

Пусть задана система координат x во всем пространстве. В точке A известна метрика $g_{\alpha\beta}(x)$. Для одинаковости геометрических свойств пространства во всех других точках надо, чтобы в окрестности каждой из них возможно было перечертить координаты, т. е. сделать преобразование, зависящее от координат точки $B(b^1, b^2, b^3)$:

$$x^* = x^*(x, B), \tag{21.1.1}$$

такое, чтобы функции $g_{\alpha\beta}(x)$ и $g_{\alpha\beta}(x^*)$ одинаково зависели от своих аргументов. Можно выразить то же самое и другими словами. Преобразование (21.1.1) при тождественности функций $g_{\alpha\beta}(x)$ от x и $g_{\alpha\beta}(x^*)$ от x^* описывает сдвиг пространства в самом себе, при котором точка с координатами x^1, x^2, x^3 перемещается в другую точку с координатами b^1, b^2, b^3; сетка координат преобразуется при этом по закону (20.1.1), и метрика $g_{\mu\nu}$ остается неизменной, но начало координат, например, лежит уже в другой точке. Для однородности необходима возможность каждую точку пространства совмещать таким образом с любой другой.

Если в трехмерном пространстве, помимо его метрики, заданы другие тензоры, векторы или скаляры (например, тензор энергии-импульса материи), то и они должны обладать аналогичным свойством, т. е. при преобразовании (21.1.1) функциональная зависимость величин от новых координат должна быть такой же, как и от старых.

В четырехмерном мире для выполнения свойства однородности на трехмерных пространственных сечениях необходимо выполнение условия тождественности функциональной зависимости при преобразовании (21.1.1) для величин, описывающих не только кривизны трехмерного пространства, но и кривизну четырехмерного пространства.

Заметим, что если величины, характеризующие четырехмерное пространство-время, однородны на трехмерных пространственных сечениях, то автоматически будет однороден на тех же сечениях и тензор энергии-импульса, так как он выражается с помощью уравнений Эйнштейна через тензор кривизны четырехмерного пространства-времени.

Пусть трехмерное пространство однородно, тогда в окрестности каждой точки его можно смещать в любом направлении на малый вектор ξ^α. Этим обеспечивается возможность совмещения данной точки с любой близлежащей. При таком смещении пространства заданием вектора ξ^α в данной точке и условием однородности в остальных точках смещение однозначно определяется, т. е. определяется вектор $\xi^\alpha=\xi^\alpha(x)$ как функция координат. Оказывается, вектор ξ^α должен удовлетворять уравнениям

$$\xi_{\alpha,\,\beta}+\xi_{\beta,\,\alpha}=0, \tag{21.1.2}$$

где запятая обозначает ковариантное дифференцирование. Вектор ξ_α носит название вектора Киллинга, а уравнения (21.1.2) называют уравнениями Киллинга. Очевидно, в однородном трехмерном пространстве, задавая в окрестности некоторой точки три некомпланарных смещения пространств, можно получить три независимых семейства векторов Киллинга.

Структура однородного пространства или, иными словами, разные типы однородных пространств определяются структурой полей векторов Киллинга. Классификация однородных трехмерных пространств по структуре полей векторов Киллинга была проведена Бианки. Мы дадим здесь эту классификацию применительно к космологии в несколько иной форме, приведенной, например, в работах Эллис и Мак-Коллама (1969), Белинского, Лифшица, Халатникова (1970).

На языке математики описанная выше пространственная однородность космологической модели формулируется следующим образом.

Космологическая модель называется пространственно-однородной, если допускает трехпараметрическую [зависимость от b^1, b^2, b^3 в преобразованиях (21.1.1)] группу движений (т. е. преобразований с сохранением функционального вида метрики), действующую транзитивно (т. е. позволяющую совместить каждую точку с каждой) на пространственноподобных трехмерных гиперповерхностях. Оказывается [см., например, Петров (1966) и упомянутую работу Эллис и Мак-Коллама], что трехмерные сечения, на которых осуществляется однородность, геодезически параллельны, т. е. близкие сечения везде отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии. Поэтому, если провести мировые линии, ортогональные во всех точках к этим сечениям, и выбрать эту конгруэнцию линий за систему отсчета, то метрика в такой системе может быть записана в форме

$$ds^2=dt^2+g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta; \tag{21.1.3}$$

иными словами, такая система отсчета «синхронна» по терминологии Лифшица и Халатникова. Трехмерные пространства этой системы отсчета при $t=\text{const}$ мы выбрали как однородные пространства. Известно (см. ТТ и ЭЗ), что если $g_{0\alpha}=0$, то система отсчета не вращается. Это, однако, вовсе не означает, что материя в однородной космологической модели обязательно не вращается. Ведь материя может двигаться относительно данной системы отсчета. Конечно, в однородной модели и движение материи должно быть однородным. Как мы увидим далее, при этом не исключается и движение материи с вращением.

Сформулированные выше условия однородности получили название «групповой» однородности. Требование однородности можно было бы сформулировать и по-другому.

Пусть расширение материи в космологической модели начинается от сингулярности. Будем отсчитывать время в каждой точке материи как собственное время этого элемента, начиная от сингулярности. Назовем теперь однородными такие модели, в которых для каждого элемента среды в один и тот же момент собственного времени Вселенная выглядит по всем свойствам точно так же, как и для любого другого наблюдателя в тот же момент его собственного времени. Однако, как заметил Грищук, при выполнении уравнений Эйнштейна этот критерий однородности сводится к «групповому», т.е. все такие модели однородны и в «групповом» смысле *). На еще одном критерии однородности мы остановимся несколько позже.

Вернемся к групповому критерию. Рассмотрим однородные трехмерные пространства моделей (21.1.3). Так как они однородны, то в них имеются поля векторов Киллинга, удовлетворяющие (21.1.2). Наличие полей векторов Киллинга в трехмерных пространствах позволяет, как показано в цитированных выше работах, записать пространственную часть метрики (21.1.3) в виде

$$dl^2=\gamma_{ab}\,(e^a_\alpha\,dx^\alpha)\,(e^b_\beta\,dx^\beta). \qquad (21.1.4)$$

Мы условимся в этой главе, что латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, как и греческие. Здесь $\gamma_{ab}=\gamma_{ab}(t)$ зависят только от t, величины вида $e^a_\alpha=e^a_\alpha(x)$ зависят только от пространственных координат, а $e^a_\alpha\,dx^\alpha$ — три дифференциальные формы, не меняющиеся при движении, т. е. не меняющие своего вида при преобразовании (21.1.1). Латинский индекс в выражении e^a_α нумерует дифференциальную форму. Независимость выражений в скобках (21.1.4) при преобразовании (21.1.1) и обеспечивает выполнение одинаковой функциональной зависимости $g_{\mu\nu}(x)$ от x и $g_{\mu\nu}(x^*)$ от x^*. Далее, оказывается, что для выполнения неизменности дифференциальных форм $e^a_\alpha\,dx^\alpha$ при преобразовании (21.1.1) необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$e^\alpha_a e^\beta_b\,(\partial_\beta e^c_\alpha-\partial_\alpha e^c_\beta)=C^c_{\cdot ab}. \qquad (21.1.5)$$

Здесь выражения вида e^α_a определяются из соотношений $e^\alpha_a\,e^b_\alpha=\delta^b_a$; $e^\alpha_a\,e^a_\beta=\delta^\alpha_\beta$, $C^c_{\cdot ab}$ — константы. Из формул (21.1.5) ясно, что

$$C^c_{\cdot ab}=C^c_{\cdot ba}. \qquad (21.1.6)$$

*) Обратное, вообще говоря, неверно, так как групповой критерий не предполагает обязательно наличия сингулярности.

Кроме того, должно выполняться тождество

$$C^{f}_{\cdot ab}C^{d}_{\cdot fc}+C^{f}_{\cdot bc}C^{d}_{\cdot fa}+C^{f}_{\cdot ca}C^{d}_{\cdot fb}=0. \qquad (21.1.7)$$

В заданном трехмерном однородном пространстве выбор векторов e^{α}_{a} не однозначен, точно так же как и векторов Киллинга. Линейная комбинация $A^{b}_{a}e^{\alpha}_{b}$ с постоянными A^{b}_{a}, очевидно, снова удовлетворяет (21.1.5), но с другими постоянными $C^{c}_{\cdot ab}$. Классификация однородных пространств состоит в составлении списка констант $C^{c}_{\cdot ab}$, удовлетворяющих (21.1.5) и несводимых друг к другу допустимыми преобразованиями.

Анализ этого вопроса показывает, что такой «базисный» набор может быть представлен в виде табл. XVI.

ТАБЛИЦА XVI

Значения структурных констант для разных типов Бианки

Тип по классификации Бианки	$C^{2}_{\cdot 12}=C^{3}_{\cdot 13}$	$C^{1}_{\cdot 23}$	$C^{2}_{\cdot 31}$	$C^{3}_{\cdot 12}$	Тип по классификации Бианки	$C^{2}_{\cdot 12}=C^{3}_{\cdot 13}$	$C^{1}_{\cdot 23}$	$C^{2}_{\cdot 31}$	$C^{3}_{\cdot 12}$
I	0	0	0	0	V	1	0	0	0
II	0	1	0	0	IV	1	0	0	1
VII_0	0	1	1	0	VII_h	a*)	0	1	1
VI_0	0	1	−1	0	III	1	0	1	−1
IX	0	1	1	1	VI_h	$a\neq 1$	0	1	−1
VIII	0	1	1	−1					

*) Параметр a пробегает все положительные значения.

Компоненты $C^{c}_{\cdot ab}$, отличающиеся от приведенных в таблице порядком нижних индексов, имеют, согласно (21.1.6), противоположный знак. Остальные компоненты фундаментального набора $C^{c}_{\cdot ab}$ тождественно равны нулю.

Решение уравнений Киллинга для операторов группы позволяет найти явную зависимость метрики от пространственных координат. Зависимость метрик всех типов от пространственных координат можно найти, например, у Петрова (1966). Мы здесь не будем приводить полностью эти результаты и отметим только важнейшие случаи. Трехмерные пространства моделей типа I всегда являются плоскими пространствами, но тензор скоростей деформации пространственных сечений, вообще говоря, анизотропен. Метрика для этого типа моделей записывается в виде

$$ds^2=dt^2+g_{\alpha\beta}(t)\,dx^{2}\,dx^{\beta}, \qquad (21.1.8)$$

где $g_{\alpha\beta}$ — функции только t.

Движениями группы здесь являются параллельные переносы в трехмерном пространстве вдоль координатных линий декартовой системы координат. Свойства моделей (21.1.8) подробно рассмотрены в предыдущих главах. Модели с плоским трехмерным пространством содержатся также как частный случай в типе VII_0, но в этих моделях деформация пространства иная (см. следующий параграф). Трехмерные пространства моделей типа V являются пространствами постоянной отрицательной кривизны, но деформирующимися с течением времени, вообще говоря, анизотропно.

Пространства постоянной отрицательн й кривизны содержатся также в моделях типа VII_h.

Наконец, трехмерные замкнутые пространства постоянной положительной кривизны содержатся в моделях типа IX.

Приведенная выше классификация охватывает все однородные пространства согласно «групповому» определению, приведенному на стр. 569. Грищук (1970) заметил, что следует называть пространственно-однородными модели не только, допускающие трехпараметрическую группу движений, действующих транзитивно на трехмерных пространственноподобных гиперповерхностях, но и допускающие на этих гиперповерхностях группу движений большей подвижности (т. е. 4-или 6-параметрическую) *), даже если она не содержит в качестве подгруппы трехпараметрическую (на трехмерных гиперповерхностях) и поэтому не попала в приведенную выше классификацию.

Действительно, увеличение числа параметров группы только увеличивает симметрию пространства (добавляя, например, к возможности трансляции еще и вращение) и вовсе не нарушает однородности.

Анализ этого вопроса показал, что такое расширение понятия однородности заставляет добавить к девяти типам Бианки лишь космологическую модель следующего вида:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,dz^2 - b^2(t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (21.1.9)$$

Трехмерное пространство этой модели является топологическим произведением сферы на прямую. Модели такого вида были рассмотрены Новиковым (1961), Дорошкевичем (1965), Зельдовичем (1965а), Грищуком (1967а), Рубаном (1971) и другими. Эта модель допускает 4-параметрическую группу движений, действующую транзитивно на трехмерных пространственных сечениях. В дальнейшем, говоря о групповом критерии однородности, мы будем понимать его в указанном расширенном смысле и включать в рассмотрение модель (21.1.9).

---

*) Пятипараметрическая полная группа движений на трехмерных гиперповерхностях невозможна [см. Петров (1966)].