§ 2. Дифференциальный критерий однородности

В литературе встречается критерий однородности, отличный от группового. Он был предложен Зельмановым (1959б) и получил название дифференциального. Согласно этому критерию, модель считается однородной, если трехмерные ковариантные производные от всех скалярных, векторных и тензорных полей по всем пространственным координатам равны нулю.

На первый взгляд этот критерий кажется столь же естественным, как и групповой критерий. Однако дифференциальный критерий накладывает на модели более жесткие требования, чем групповой. Действительно, этот критерий требует, чтобы свойства Вселенной были не только одинаковы в разных точках трехмерного пространства в один и тот же момент времени, но и чтобы при переходе от одной точки трехмерного пространства к другой (в фиксированный момент времени) ориентация векторных и тензорных полей не менялась.

Для пояснения различия между двумя критериями мы приведем пример, который является упрощением примера из работы Грищука (1971).

Пусть в плоском трехмерном пространстве имеется неизменный во времени поток пробных частиц (не создающих поле тяготения). Зададим скорости частиц в декартовой системе координат формулами

$$\left.\begin{aligned} v_x &= a\cos(Az+B), \\ v_y &= a\sin(Az+B), \\ v_z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (21.2.1)$$

Здесь a, A, B — постоянные. По абсолютной величине скорость везде одинакова. Векторы скорости лежат в плоскостях $z=\mathrm{const}$, в каждой плоскости скорость не зависит от координат x, y. При переходе от одного сечения $z=\mathrm{const}$ к другому $z'=\mathrm{const}$ вектор скорости поворачивается, меняется его ориентация. Согласно дифференциальному критерию, эта модель неоднородна, так как производная от вектора скорости по z-координате отлична от нуля (вектор поворачивается). Согласно групповому критерию, эта модель однородна, ее можно сдвигать в трехмерном пространстве так, чтобы поле скоростей переходило само в себя и каждую точку можно было совместить с каждой. Модель можно сдвигать параллельно вдоль осей x и y, а также вдоль оси z, поворачивая при этом вокруг оси z на угол $\alpha=A\Delta z$. Такая группа движений принадлежит к типу VII по классификации Бианки.

На этом примере наглядно видно различие между критериями.

Подчеркнем, что иногда в нерелятивистской механике поле векторов или тензоров в плоском пространстве называют однородным только в том случае, если производные от компонент тензора по декартовым координатам равны нулю, т. е. когда выполняется дифференциальный критерий. Нас интересует одинаковость свойств всех точек пространства, а не то, поворачиваются ли векторы и тензоры при переходе из одной точки в другую точку трехмерного пространства.

В приведенном выше примере свойства всех точек пространства явно одинаковы и модель следует считать однородной. Мы поэтому будем в дальнейшем понимать под однородностью однородность в групповом смысле, если не делается специальных оговорок.

Что касается моделей, удовлетворяющих дифференциальному критерию, то Грищук показал, что все такие модели должны быть либо изотропными моделями Фридмана, либо анизотропными моделями с плоским пространством вида (21.1.8), либо моделями вида (21.1.9), либо, наконец, моделями, пространство которых является произведением псевдосферы на прямую, т. е.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\, dz^2 - b^2(t)\,[d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, d\theta^2]. \qquad (21.2.2)$$

Эта модель содержится как частный случай в типе III моделей по классификации Бианки. Таким образом, класс дифференциально однородных моделей ýже класса моделей с групповой однородностью, причем все дифференциальные модели однородны и в групповом смысле, если понимать последний так, как это сформулировано в конце предыдущего параграфа.

В заключение параграфа вернемся к примеру векторного поля (21.2.1) в плоском пространстве. Этот пример методически интересен еще и тем, что наглядно демонстрирует, как в одном и том же пространстве (в данном случае в трехмерном плоском) разное задание векторных полей (в данном случае поля скоростей пробных частиц) может приводить к тому, что они будут относиться к разным типам Бианки. Модель с полем (21.2.1) относится, как уже отмечалось, к типу VII; так как при сдвиге по оси z все пространство надо поворачивать на угол $\alpha = Az$. Если же в трехмерном пространстве задать поле скоростей, везде одинаковых и параллельных между собой, то модель будет относиться к типу I. Таким образом, для классификации важны не только геометрические свойства пространства, но, вообще говоря, и свойства всех рассматриваемых векторных и тензорных полей.

§ 3. Динамические свойства однородных моделей вблизи сингулярности

Обратимся теперь к проблеме эволюции однородных космологических моделей во времени.

Для однородных космологических моделей эта задача сильно упрощается по сравнению с общим случаем, так как уравнения Эйнштейна сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для получения этих уравнений в каждой точке трех-