дифференциальный критерий. Нас интересует одинаковость свойств всех точек пространства, а не то, поворачиваются ли векторы и тензоры при переходе из одной точки в другую точку трехмерного пространства.

В приведенном выше примере свойства всех точек пространства явно одинаковы и модель следует считать однородной. Мы поэтому будем в дальнейшем понимать под однородностью однородность в групповом смысле, если не делается специальных оговорок.

Что касается моделей, удовлетворяющих дифференциальному критерию, то Грищук показал, что все такие модели должны быть либо изотропными моделями Фридмана, либо анизотропными моделями с плоским пространством вида (21.1.8), либо моделями вида (21.1.9), либо, наконец, моделями, пространство которых является произведением псевдосферы на прямую, т. е.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,dz^2 - b^2(t)\,[d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, d\theta^2]. \qquad (21.2.2)$$

Эта модель содержится как частный случай в типе III моделей по классификации Бианки. Таким образом, класс дифференциально однородных моделей у́же класса моделей с групповой однородностью, причем все дифференциальные модели однородны и в групповом смысле, если понимать последний так, как это сформулировано в конце предыдущего параграфа.

В заключение параграфа вернемся к примеру векторного поля (21.2.1) в плоском пространстве. Этот пример методически интересен еще и тем, что наглядно демонстрирует, как в одном и том же пространстве (в данном случае в трехмерном плоском) разное задание векторных полей (в данном случае поля скоростей пробных частиц) может приводить к тому, что они будут относиться к разным типам Бианки. Модель с полем (21.2.1) относится, как уже отмечалось, к типу VII; так как при сдвиге по оси $z$ все пространство надо поворачивать на угол $\alpha = Az$. Если же в трехмерном пространстве задать поле скоростей, везде одинаковых и параллельных между собой, то модель будет относиться к типу I. Таким образом, для классификации важны не только геометрические свойства пространства, но, вообще говоря, и свойства всех рассматриваемых векторных и тензорных полей.

## § 3. Динамические свойства однородных моделей вблизи сингулярности

Обратимся теперь к проблеме эволюции однородных космологических моделей во времени.

Для однородных космологических моделей эта задача сильно упрощается по сравнению с общим случаем, так как уравнения Эйнштейна сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для получения этих уравнений в каждой точке трехмерных пространственных сечений вводят тройки реперных векторов $e^a_\alpha$, где $e^a_\alpha$ — те же самые величины, которые входят в выражение (21.1.4). После этого все трехмерные векторные и тензорные поля проектируются на эти реперы. Например:

$$T^{ab}=e^a_\alpha e^b_\beta T^{\alpha\beta};\qquad R^{0a}=e^a_\alpha R^{0\alpha};\qquad u^a=e^a_\alpha u^\alpha. \tag{21.3.1}$$

Поднятие и опускание индексов производится с помощью матрицы $\gamma_{ab}$ или обратной ей матрицы $\gamma^{ab}$ $(\gamma^{ab}\,\gamma_{bc}=\delta^a_c)$:

$$T_{ab}=T^{cd}\gamma_{ac}\gamma_{bd}. \tag{21.3.2}$$

Проделав такое проектирование уравнений Эйнштейна, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [вывод их см. Шюкинг (1963)]:

$$-\frac{d}{dt}D^a_a-D^b_aD^a_b=\frac{8\pi G}{c^4}\left(T^0_0-\frac{1}{2}T\right), \tag{21.3.3}$$

$$-D^c_b\left(C^b_{\cdot ca}-\delta^b_aC^f_{\cdot fc}\right)=\frac{8\pi G}{c^4}T^0_a, \tag{21.3.4}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\gamma}D^b_a\right)+\gamma^{bc}\left(a^d_{\cdot af}a^f_{\cdot cd}+C^d_{\cdot df}a^f_{\cdot ac}\right)=\frac{8\pi G}{c^4}\left(T^b_a-\frac{1}{2}\delta^b_aT\right). \tag{21.3.5}$$

Здесь обозначено:

$$D_{ab}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\gamma_{ab}, \tag{21.3.6}$$

$$a^c_{\cdot ab}=\frac{1}{2}\left(C^c_{\cdot ab}+C^f_{\cdot bd}\gamma_{fa}\gamma^{cd}-C^f_{\cdot da}\gamma_{fb}\gamma^{dc}\right). \tag{21.3.7}$$

К этому добавляется уравнение состояния, не нарушающее однородности (в том числе и для бесстолкновительных частиц).

Все величины в (21.3.3), (21.3.5) зависят только от времени и не зависят от пространственных координат, $C^c_{\cdot ab}$ — константы. Подставляя в (21.3.3) — (21.3.5) значения структурных констант из табл. XVI, получаем уравнения, описывающие эволюцию во времени моделей разных типов.

Остановимся на анализе поведения моделей вблизи сингулярности. Поставим следующий вопрос: является ли асимптотика решения вблизи сингулярности $t\to 0$ вида (18.3.6) — (18.3.7) применимой и в общем случае анизотропных моделей с искривленным однородным пространством, т. е. представляет ли собой решение вблизи сингулярности расширение по двум направлениям и сжатие по третьему (рассматривается расширение модели от сингулярности) в общем случае? Анализ этого вопроса проделан Лифшицем и Халатниковым (1963а, б), а затем Дорошкевичем (1968), Грищуком (1970), Эллис и Мак-Колламом (1969) и Мак-Колламом (1971).

Обратимся к уравнениям (21.3.3) — (21.3.5).

Уравнение (21.3.3) не содержит структурных констант $C^c_{\cdot ab}$, определяющих тип модели по Бианки. Оно не отличается от уравнения для моделей с плоским пространством, подробно разобранных выше.

Уравнения (21.3.4) не содержат вторых производных по времени от искомых величин $\gamma_{ab}(t)$. Они лишь накладывают ограничения на выбор возможных начальных условий. Эти уравнения [см., например, Петров (1966)] не участвуют непосредственно в интегрировании по времени: если они удовлетворяют начальным условиям, а остальные уравнения выполнены в четырехмерной области, то и уравнения (21.3.4) автоматически выполняются в той же области. Структурные константы $C^c_{\cdot ab}$ существенно входят в уравнения (21.3.5). Рассмотрим эти уравнения.

Предположим, что асимптотика решения вблизи сингулярности носит характер (18.3.6), (18.3.7). Слагаемые в первом члене уравнений (21.3.5) имеют порядок $\sim 1/t^2$. Для тензора энергии-импульса можно повторить сказанное в § 3 гл. 18: имеется, вообще говоря, вакуумная стадия вблизи сингулярности, когда членами в правой части (21.3.5) можно пренебречь при $t \to 0$, так как они имеют меньший показатель степени в знаменателе, чем двойка.

Выполнение условий вида (18.3.6), (18.3.7) обеспечивает выполнение уравнения (21.3.3) и обращение в нуль первого члена уравнений (21.3.5). Что касается членов в (21.3.5), содержащих структурные константы $C^c_{\cdot ab}$, то здесь, вообще говоря, могут появиться члены, имеющие более высокий порядок, чем $1/t^2$. Это связано с тем, что в режиме (18.3.6), (18.3.7) вдоль одного направления масштабный фактор входит с отрицательной степенью $t$. Пусть это будет, например, направление вдоль репера с индексом 1. Тогда появляется член вида $C^{12}_{\cdot 23}\ \gamma^2_{11}\ /\gamma$, где $\gamma$ — определитель матрицы $\gamma_{ab}$. Этот член имеет порядок $\sim t^{-2(p_2+p_3-p_1)} = t^{-2(1+2|p_1|)}$. Величина в скобках в показателе степени больше единицы, т. е. весь член имеет порядок больше, чем $1/t^2$, и уравнения (21.3.5) не выполняются. Для выполнения этих уравнений необходимо, чтобы была равна нулю константа $C^c_{\cdot ab}(a \neq b \neq c)$, соответствующая реперу с индексом $c$, вдоль которого масштабный фактор имеет отрицательный показатель степени в зависимости от $t$. Так, при $t \to 0$ отрицательный показатель степени у $t$ вдоль направления репера с индексом 1 возможен лишь в том случае, если $C^1_{\cdot 23} = 0$ и т. д.

Теперь одного взгляда на табл. XVI достаточно, чтобы убедиться, что в первых семи типах моделей есть по крайней мере одна константа $C^c_{\cdot ab}(a \neq b \neq c)$ (последние три столбца таблицы), равная нулю. Это делает возможным установление при $t \to 0$ в этих типах асимптотики вида (18.3.6), (18.3.7) с отрицательными показателями степени вдоль соответствующего направления.

Таким образом, подобная казнеровская асимптотика решения является общей для первых семи типов при условии $T_0^\alpha = 0$*).

Разумеется, при приближении к сингулярности еще до установления асимптотического режима типа Казнера свойства решения уравнений Эйнштейна более сложные, чем для модели с плоским пространством. Подобно тому как в модели с плоским пространством, но с магнитным полем члены в уравнениях с тензором энергии-импульса запрещали асимптотику с отрицательным показателем степени у $t$ вдоль поля (см. § 2 гл. 18), так и члены с кривизной пространства заставляют решение перестраиваться при $t \to 0$ до тех пор, пока не установится режим Казнера с $p_i < 0$ в «разрешенном» направлении. Мы подробнее остановимся на промежуточных этапах в следующих параграфах.

Оговоримся сразу, что решения уравнений ОТО для первых семи типов моделей допускают в качестве частных вырожденных случаев и иную асимптотику вблизи сингулярности, отличную от казнеровской. Таковы, например, фридмановские решения. Но все эти случаи вырождены, требуют специальных начальных условий. Мы их детально рассматривать не будем, за исключением модели Фридмана (для рассмотрения этого случая есть особые причины, см. предыдущие разделы книги), отсылая за подробностями к цитированным в этом параграфе работам.

Типы моделей VIII и IX не допускают казнеровской асимптотики вблизи сингулярности, так как в этих моделях все структурные константы вида $C^c_{ab}$ $(a \neq b \neq c)$ отличны от нуля. Эволюция моделей этого типа будет рассмотрена в следующих параграфах.

## § 4. Модель «перемешанного» мира

Вернемся к одному из вопросов, поставленных во введении к разделу IV. Как там отмечалось, однородность и изотропия Вселенной в больших масштабах требуют специального объяснения. Если считать, что однородность возникает в результате каких-то физических процессов в начале космологического расширения, то для этого требуется, как минимум, чтобы точки, разнесенные на расстояние, соответствующее масштабу однородности, были причинно связаны на момент протекания выравнивающих процессов, т. е. чтобы сигнал, идущий со скоростью света, успел пройти это расстояние за время, протекшее с начала расширения. Конечно, этого условия отнюдь не достаточно для выравнивания неоднородностей;

*) Заметим, что в случае моделей, в которых материя движется относительно системы отсчета, $T_0^\alpha \neq 0$ и могут появиться слагаемые, нарушающие казнеровскую асимптотику (18.3.6), (18.3.7). В этом случае асимптотика аналогична модели § 4 гл. 21; см. Лукаш (1974б), Лукаш, Новиков, Старобинский (1975).