

тотики вида (18.3.6), (18.3.7) с отрицательными показателями степени вдоль соответствующего направления.

Таким образом, подобная казнеровская асимптотика решения является общей для первых семи типов при условии  $T_0^\alpha = 0^*$ .

Разумеется, при приближении к сингулярности еще до установления асимптотического режима типа Казнера свойства решения уравнений Эйнштейна более сложные, чем для модели с плоским пространством. Подобно тому как в модели с плоским пространством, но с магнитным полем члены в уравнениях с тензором энергии-импульса запрещали асимптотику с отрицательным показателем степени у  $t$  вдоль поля (см. § 2 гл. 18), так и члены с кривизной пространства заставляют решение перестраиваться при  $t \rightarrow 0$  до тех пор, пока не установится режим Казнера с  $p_i < 0$  в «разрешенном» направлении. Мы подробнее остановимся на промежуточных этапах в следующих параграфах.

Оговоримся сразу, что решения уравнений ОТО для первых семи типов моделей допускают в качестве частных вырожденных случаев и иную асимптотику вблизи сингулярности, отличную от казнеровской. Таковы, например, фридмановские решения. Но все эти случаи вырождены, требуют специальных начальных условий. Мы их детально рассматривать не будем, за исключением модели Фридмана (для рассмотрения этого случая есть особые причины, см. предыдущие разделы книги), отсылая за подробностями к цитированным в этом параграфе работам.

Типы моделей VIII и IX не допускают казнеровской асимптотики вблизи сингулярности, так как в этих моделях все структурные константы вида  $C_{ab} (a \neq b \neq c)$  отличны от нуля. Эволюция моделей этого типа будет рассмотрена в следующих параграфах.

#### § 4. Модель «перемешанного» мира

Вернемся к одному из вопросов, поставленных во введении к разделу IV. Как там отмечалось, однородность и изотропия Вселенной в больших масштабах требуют специального объяснения. Если считать, что однородность возникает в результате каких-то физических процессов в начале космологического расширения, то для этого требуется, как минимум, чтобы точки, разнесенные на расстояние, соответствующее масштабу однородности, были причинно связаны на момент протекания выравнивающих процессов, т. е. чтобы сигнал, идущий со скоростью света, успел пройти это расстояние за время, протекшее с начала расширения. Конечно, этого условия отнюдь не достаточно для выравнивания неоднородностей;

\*) Заметим, что в случае моделей, в которых материя движется относительно системы отсчета,  $T_0^\alpha \neq 0$  и могут появиться слагаемые, нарушающие казнеровскую асимптотику (18.3.6), (18.3.7). В этом случае асимптотика аналогична модели § 4 гл. 21; см. Лукаш (1974б), Лукаш, Новиков, Старобинский (1975).

более того, Зельдовичем (1970а) показано, что выравнивания всех неоднородностей не происходит, но указанное требование является необходимым.

Наличие оптического горизонта в однородной изотропной модели Фридмана делает принципиально невозможным выравнивание неоднородностей «перемешиванием» в заметных масштабах в начале расширения.

Мизнер (1969а, б) предложил космологическую модель, в которой отсутствует оптический горизонт и возможно перемешивание. Модель Мизнера основана на открытом Лифшицем, Халатниковым и Белинским [см. Халатников, Лифшиц (1970), Белинский, Лифшиц, Халатников (1970), Белинский, Халатников (1969а, б)] решении уравнений Эйнштейна для моделей типа IX Бианки.

Идея Мизнера заключалась в следующем. Пусть на протяжении некоторого промежутка времени модель описывается казнеровским решением с  $p_1=p_2=0$ ,  $p_3=1$ . В этом случае для распространения света вдоль третьей оси получаем из условия  $ds=0$  (полагаем скорость света  $c=1$ )

$$dt = t dx, \quad x = \int_{t_0}^t \frac{dt}{t} \sim \ln \frac{t}{t_0}, \quad (21.4.1)$$

Если  $t_0 \rightarrow 0$ , то  $x \rightarrow \infty$ . Таким образом, вдоль третьей оси свет успевает пройти сколь угодно большое расстояние, если  $t_0$  достаточно мало. В то же время вдоль двух других осей свет успевает пройти лишь малое расстояние, пропорциональное  $\Delta t = t - t_0$ . Если затем решение перестраивается таким образом, что  $p_1=1$ ,  $p_2=p_3=0$ , то свет успевает пройти большое расстояние вдоль первой оси, и т. д.

Мизнер показал, что в принципе возможна такая модель типа IX Бианки с замкнутым трехмерным пространством, которая обладает именно такими свойствами и в которой свет успевает обойти мир много раз по всем направлениям. В такой модели решение вблизи сингулярности уже не описывается казнеровской ситуацией, а на общее расширение модели наложены осцилляции вдоль разных осей. То, что решение для типа IX должно быть не казнеровским (так же как и для типа VIII), ясно из табл. XVI и уравнений (21.3.5). Действительно, для этих типов все  $C_{ab}^c$  ( $a \neq b \neq c$ ) отличны от нуля и установление казнеровской асимптотики невозможно (см. § 3 этой главы).

Поведение решения для модели перемешанного мира вблизи сингулярности исследовалось в работах Халатникова, Лифшица (1970), Белинского, Халатникова (1969а, б), Мизнера (1969а, б), Белинского, Лифшица, Халатникова (1970), Е. Лифшица, И. Лифшица, Халатникова (1970), Дорошкевича, Новикова (1970), С. Новикова (1972), Белинского, Лифшица, Халатникова (1971), Грищука, Дорошкевича, Лукаша (1971), Матцнера, Шепли, Уоррена (1970).

Последние три работы рассматривают общий случай, когда материя движется относительно системы отсчета. Впрочем, это условие не меняет основных черт решения, и мы здесь рассмотрим только случай покоящейся материи.

Анализ показывает, что решение вблизи сингулярности отличается от упрощенной картины, нарисованной выше.

Метрика модели перемешанного мира записывается в синхронной системе отсчета в следующем виде:

$$g_{00} = 1, \quad -g_{\alpha\beta} = \gamma_{ab} e_{\alpha}^a e_{\beta}^b, \\ \gamma_{ab} = \begin{pmatrix} a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & c^2(t) \end{pmatrix}, \quad e_{\alpha}^a = \begin{pmatrix} \cos x^3 & \sin x^3 \sin x^1 & 0 \\ -\sin x^3 & \cos x^3 \sin x^1 & 0 \\ 0 & \cos x^1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21.4.2)$$

Функции  $a, b, c$  описывают анизотропную деформацию в каждой точке; их величина характеризует протяженность замкнутого мира в трех ортогональных направлениях. Изменение  $a, b, c$  с течением времени описывает эволюцию модели.

Мы уже отмечали выше, что вблизи сингулярности тензором энергии-импульса можно пренебречь (вакуумная стадия). Мы выпишем уравнения Эйнштейна для типа IX сразу для вакуумной стадии\*):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} &= 0, \\ \frac{(\dot{a}b\dot{c})}{abc} + \frac{a^4 - (b^2 - c^2)^2}{2(abc)^2} &= 0, \\ \frac{(\dot{a}b\dot{c})}{abc} + \frac{b^4 - (a^2 - c^2)^2}{2(abc)^2} &= 0, \\ \frac{(\dot{a}b\dot{c})}{abc} + \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{2(abc)^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (21.4.2a)$$

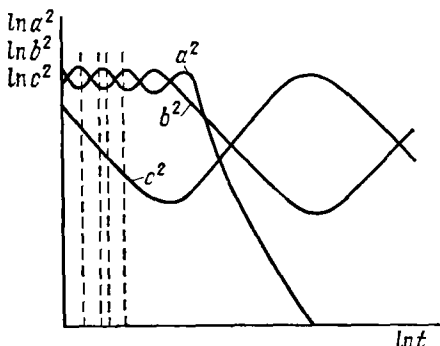


Рис. 57. Эволюция модели «перемешанного» мира при приближении к сингулярности.

(точка — дифференцирование по  $t$ ).

На рис. 57 показано поведение функций  $a(t), b(t)$  и  $c(t)$  (по горизонтали отложен  $\ln t$ , по вертикали — значения функций  $\ln a^2, \ln b^2, \ln c^2$ ).

Будем рассматривать поведение этих функций при продвижении к сингулярности. Две функции (скажем,  $a^2$  и  $b^2$ ) осциллируют на некотором интервале  $t$  (назовем его большим циклом), в то время как третья ( $c^2$ ) монотонно убывает по мере продвижения к сингуляр-

\*) О поздней стадии расширения, когда  $T_{ik}$  становится существенным, см. §7 этой главы.

ности. Затем  $c^2$  начинает возрастать (идем к  $t \rightarrow 0$ ), в то время как одна из осциллирующих функций (например,  $a^2$ ) убывает монотонно. В дальнейшем  $b^2$  и  $c^2$  осциллируют, а  $a^2$  опять убывает монотонно. Через некоторое время снова происходит смена осциллирующих и монотонно изменяющейся функции и т. д. Заметим, что объем мира  $V \sim abc$  меняется монотонно. На небольших участках, когда все три функции изменяются монотонно, решение описывается формулами Казнера [подробнее см. Белинский Лифшиц, Халатников (1970)].

Обозначим  $a^2/b^2 = Q$  в точках максимума функций  $a^2$  и  $P = a^2/c^2$  в точке минимума  $c^2$  в данном цикле. Анализ показывает, что при движении к сингулярности внутри большого цикла амплитуда осцилляций нарастает. Поэтому, если  $Q$  мало в начале данного цикла, то оно становится большим в данном или (за исключением вырожденного случая, о чем говорится далее) в следующем цикле. Поведение модели существенно зависит еще от одного параметра:  $u = k + x > 1$ , где  $k$  — целая часть  $u$ , равная числу колебаний в данном цикле, а  $x$  — дробная часть  $u$ , определяющая параметр  $u$  для следующего цикла:  $u_{s+1} = 1/x_s$  (здесь  $s$  — номер цикла).

Пусть  $Q \gg 1$ ; тогда оказывается

$$P = (4Q_0)^{u^2}, \quad (21.4.3)$$

где  $Q_0$  — амплитуда осцилляций в начале цикла (напомним, что мы идем от больших  $t$  к малым). При переходе к следующему большому циклу оказываются справедливыми соотношения

$$Q_{02} \approx P_1, \quad (21.4.4)$$

т. е. амплитуда осцилляций  $Q_{02}$  порядка  $P_1$  и велика. Для величины  $P_2$  имеем

$$P_2 \approx P_1^{u_2^2}. \quad (21.4.5)$$

Таким образом, величина  $P$  катастрофически быстро нарастает. Для  $s$ -го большого цикла имеем

$$P_s \approx (4Q_{01})^{u_1^2 u_2^2 \dots u_s^2}. \quad (21.4.6)$$

Подчеркнем, что эта формула практически описывает масштаб полного изменения наименьшей в цикле  $s$  функции за время всех циклов от первого до  $s$ -го, так как фактически все изменения амплитуды  $P$  происходят в  $s$ -м цикле, который является ближайшим к сингулярности из всех рассмотренных (хотя за  $s$ -м циклом, конечно, следует  $(s+1)$ -й и т. д.; число циклов бесконечно, если не накладывать ограничений на применимость ОТО, см. следующий параграф).

Приведенные формулы описывают основные характеристики решения при движении к сингулярности.

При движении в противоположном направлении все возрастающую роль в уравнениях тяготения играют члены, описывающие материю, которые мы отбросили. Мы рассмотрим поведение модели на стадии, когда эти члены становятся важными, в § 6 данной главы.

Вернемся к анизотропной стадии.

С приближением к сингулярности наблюдается стремительный рост относительных амплитуд колебаний функций  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рост  $P$  и  $Q$ ). Этот процесс может нарушиться лишь в следующем случае. В каждом цикле числа  $u = k + x$  не целые. «Опасная» ситуация, как показывает анализ (21.4.2а), может возникнуть, если  $u$  очень близко к целому числу, т. е. если  $x$  мал, а именно если  $x$  или  $1 + x$  попадает в интервал

$$1 \pm (4Q^*)^{-1}, \quad (21.4.7)$$

где  $Q^*$  — амплитуда осцилляций в конце большого цикла.

Если, в дополнение к этому, в некоторый момент  $t$  в конце цикла все функции оказываются одного порядка ( $a \approx b \approx c$ ), то анализ уравнений (21.4.2а) показывает, что в этом случае может возникнуть осцилляция с малым значением  $Q$  в следующем цикле.

Прежде чем идти дальше, отметим, что именно систематическое возникновение при продвижении к сингулярности таких циклов с малым значением  $Q$  и большим  $u$  (т. е. с большим числом осцилляций) рассматривает Мизнер, имея в виду осуществление идеи «перемешанного» мира. Когда  $Q$  мал, то свойства решения сходны с казнеровским решением (в этом случае  $c \sim t$ ,  $a$  и  $b$  приблизительно постоянны, слабо осциллируют). В этой Вселенной свет успевае много раз обойти мир вдоль оси  $c$ , осуществляя перемешивание. Если подобные ситуации систематически повторяются, то перемешивание происходит по всем направлениям.

Однако необходимо подчеркнуть, что систематическое возникновение циклов с малым  $Q$  практически невероятно.

Действительно, вероятность того, что в данном цикле  $x$  или  $1 + x$  лежит в интервале  $1 \pm (4Q^*)^{-1}$ , есть

$$\omega = \frac{1}{4Q^*}. \quad (21.4.8)$$

Величина  $\omega$  от цикла к циклу катастрофически быстро уменьшается (мы движемся в сторону сингулярности!). Полная вероятность того, что мы попадем в опасную зону (хотя бы один раз) в каком-либо цикле вплоть до сингулярности, определяется суммой ряда

$$\sum \omega = (4Q_1^*)^{-1} + (4Q_2^*)^{-1} + \dots; \quad (21.4.9)$$

эта сумма практически равна первому члену ряда, а так как  $(4Q_1^*)^{-1} \ll 1$ , то она мала,

Вероятность систематического повторения мизнеровской ситуации исчезающе мала. Мы пока не останавливаемся на вопросе о том, что модель «перемешанного» мира нельзя применять неограниченно вплоть до сингулярности, ибо, когда кривизны пространства-времени достигают  $(10^{-33} \text{ см})^{-2}$ , начинают играть роль квантовые эффекты в тяготении (см. раздел V). Некоторые замечания по этому поводу мы сделаем в конце следующего параграфа. Здесь же подчеркнем, что и без ограничений применимости ОТО при случайном выборе параметров модели  $Q$  всегда нарастает при движении к сингулярности.

В заключение параграфа отметим, что подобными же свойствами эволюции вблизи сингулярности обладает и модель типа VIII Бианки.

### § 5. О невозможности «перемешивания» в модели «перемешанного» мира

Модель Мизнера была первоначально задумана для обеспечения возможности «перемешивания» неоднородностей. Для этого необходимо, чтобы сигнал со световой скоростью мог многократно обходить мир (см. § 4 этой главы).

Обратимся теперь к проблеме возможности обхода мира типа IX Бианки сигналом, движущимся со световой скоростью [Дорошкевич, Лукаш, Новиков (1971), Грищук, Дорошкевич, Лукаш (1971)].

Уравнения для нулевых геодезических показывают, что лучи света, вышедшие из некоторой точки и движущиеся вдоль главных осей тензора кривизны трехмерного пространства, всегда будут двигаться вдоль этих направлений.

Для осуществления идеи Мизнера необходимо, чтобы свет большое число раз успевал обходить мир во всех направлениях. Изменение масштабов мира вдоль главных осей тензора кривизны описывается функциями  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$ ,  $c(\tau)$ . Зная эти функции, можно рассчитать, сколько раз свет успевает обойти мир по тому или иному направлению за определенный отрезок времени.

Если в некотором цикле амплитуда  $Q$  мала, то свет может успеть много раз обойти мир вдоль наименьшей оси  $c$ . Действительно, в этом случае (см. § 4) ось  $c \sim t$  и применимы формулы (21.4.1). Однако мы видели, что с огромной вероятностью вблизи сингулярности малые амплитуды  $Q$  никогда не осуществляются.

Возникает вопрос, возможно ли перемешивание, т. е. многократные обходы светом и звуком (так как скорость звука в горячем веществе  $v_{зв} = \frac{c}{\sqrt{3}}$ ) мира в случае, когда  $Q \gg 1$ .

Рассмотрим распространение света вдоль трех главных направлений модели. В каждом цикле монотонно меняющаяся функция (одна из трех —  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) всегда много меньше осциллирующих,