установить истинный характер начала расширения реальной Вселенной.

В 1972 г. после длительной работы Белинский, Лифшиц, Халатников построили общее (устойчивое) решение с сингулярностью, т. е. дали положительный ответ на первый вопрос.

По своим свойствам общее решение оказалось качественно таким же, как решение вблизи сингулярности для модели «перемешанного» мира (см. §§ 4 и 5 гл. 21).

При дальнейшем изложении мы остановимся на доказательстве наличия сингулярности в прошлом во Вселенной и на физических процессах вблизи самой сингулярности. Можно надеяться, что в будущем анализ этих процессов и следствий из них позволит установить истинный характер расширения Вселенной на самых ранних стадиях, при плотностях, существенно превышающих ядерную.

§ 2. Сингулярность в начале расширения

Предположения о том, что отклонения от фридмановской модели в начале расширения не позволяют избежать сингулярности, высказывались давно. Они основывались в общих чертах на следующих аргументах.

В настоящее время астрономическими методами непосредственно исследуется часть Вселенной, радиус которой меньше, чем гравитационный радиус массы этой части.

Тот факт, что при расширении массы из-под своего гравитационного радиуса сингулярность вначале неизбежна, казался весьма вероятным, хотя строгого доказательства не существовало. Отсюда делалось предположение, что расширение Вселенной начиналось от сингулярности, даже если ранние стадии расширения не описывались моделью Фридмана.

В 1965 г. появилась первая теорема Пенроуза (1965), касающаяся проблемы гравитационного коллапса. В этой теореме доказывалось, что сингулярность неизбежно возникает после сжатия тела до размеров меньше гравитационного радиуса. Вслед за этой работой последовал целый ряд теорем Пенроуза, Хоукинга и Героча, рассматривающих возникновение сингулярности как при коллапсе изолированных тел, так и в космологической проблеме. В 1970 г. Хоукингом и Пенроузом была опубликована обобщающая работа. Сформулированная в ней теорема использует предположения, которые непосредственно проверяемы астрономическими наблюдениями, поэтому она наиболее подходит для обсуждения проблемы сингулярности в космологии. В этой же работе можно найти подробную библиографию.

Все работы рассматриваемой серии используют для доказательства наличия сингулярности геометрические методы, в них не строятся аналитические решения вблизи сингулярности. Таким образом, доказанные в них теоремы являются теоремами существования, и о структуре сингулярности почти ничего сказать нельзя.

Прежде чем переходить к изложению теоремы Пенроуза — Хоукинга, остановимся на определении понятия сингулярности. Нас интересуют, конечно, истинные сингулярности пространства-времени, т. е. такие, которые объективно существуют независимо от выбора системы отсчета. Их называют истинными сингулярностями в отличие от мнимых, которые связаны с «неудачным» выбором системы отсчета. Прежде всего, существуют чисто координатные сингулярности, подобные пересечению радиальных линий полярной системы в полюсе. Таковы, например, пересечения геодезических линий, образующих синхронную систему отсчета в искривленном пространстве-времени, что особенно подчеркивается Лифшицем и Халатниковым. Несколько другого рода сингулярности, подобные гравитационному радиусу r_g в системе отсчета Шварцшильда (см. ТТ и ЭЗ). Здесь в системе отсчета Шварцшильда на r_g гравитационная сила обращается в бесконечность. Таким образом, в системе отсчета имеется физическая особенность. Но эта особенность присуща только системе отсчета, а не пространству-времени. Например, уже давно выяснено, что сингулярность на гравитационном радиусе в сферически-симметричном поле Шварцшильда (см. ТТ и ЭЗ) связана просто с тем, что внутрь сферы гравитационного радиуса нельзя продолжать жесткую, недеформирующуюся систему отсчета. Если же перейти в этом поле к системе отсчета из свободно падающих частиц, то никакой сингулярности на гравитационном радиусе нет.

Еще более поучителен следующий пример [Новиков (1964а)]. Рассмотрим в плоском пространстве-времени совокупность частиц, покоящихся в некоторый момент. Частицы начинают двигаться с ускорением, обратно пропорциональным расстоянию от некоторой точки. Это ускорение не гравитационное. Оно постоянно во времени для каждой частицы в ее собственной системе отсчета и равно c^2/r. Переход от сферических координат $\tilde{r}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}$ плоского пространства и лабораторного времени $\tilde{t}$ к сопутствующим координатам рассматриваемой системы отсчета задается преобразованиями

$$\left.\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{r}{c}\operatorname{sh}\frac{gt}{c}, \\ \tilde{r} &= r\operatorname{ch}\frac{gt}{c}, \\ \tilde{\theta} &= \theta, \quad \tilde{\varphi}=\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (22.2.1)$$

(здесь g — постоянная размерности ускорения). Подставляя эти преобразования в $ds^2=c^2d\tilde{t}^2-d\tilde{r}^2-\tilde{r}^2(d\tilde{\theta}^2+\sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\varphi}^2)$, получаем выражение для ds^2 в нашей системе:

$$ds^2=\frac{g^2r^2}{c^2}dt^2-dr^2-r^2\operatorname{ch}^2\left(\frac{gt}{c}\right)(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \quad (22.2.2)$$

Мировые линии частиц, образующих эту систему, изображены на рис. 61. Из выражения (22.2.2) следует, что в центре системы $r=0$ (всего в одной точке!) имеется особенность; здесь $g_{00}=0$. Природа этой особенности видна из рис. 61. Эта система отсчета не охватывает всей внутренности светового конуса с вершиной в точке 0. В то время как в координатах r, θ, φ, t сингулярна «всего» одна точка $r=0$ при всех t, в координатах $\tilde{r}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{t}$ это соответствует всей внутренней полости конуса $\tilde{r}-c\tilde{t}\leqslant 0$.

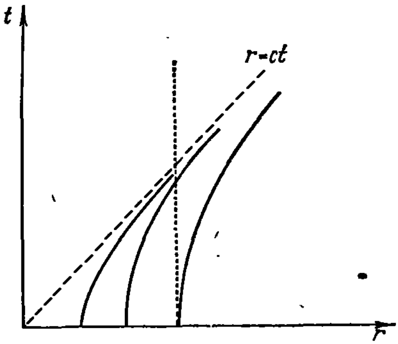

Рис. 61. Мировые линии пробных частиц, образующих систему (22.2.1). Вертикальная точечная линия — мировая линия частицы, покоящейся в лабораторной системе отсчета (тильды у координат опущены).

Как можно, оставаясь в системе r, θ, φ, t, обнаружить, что она не охватывает целого куска пространства-времени? Это можно сделать, заметив, что частица, свободно «падающая» к сингулярной точке $r=0$, достигает этой точки только за бесконечное время наблюдателя, покоящегося в этой системе. Но по собственному времени частица достигает сингулярности за конечный промежуток времени. Убедимся в этом. Возьмем частицу с $\tilde{r}=\mathrm{const}$, $\tilde{\theta}=\mathrm{const}$, $\tilde{\varphi}=\mathrm{const}$, т. е. покоящуюся в лабораторной системе. В системе r, θ, φ, t уравнение ее мировой линии имеет вид $r=\dfrac{\tilde{r}}{\operatorname{ch}(gt/c)}$, $\theta=\mathrm{const}$, $\varphi=\mathrm{const}$. Длина ее мировой линии S, определяющая ее собственное время $\tilde{t}=S/c$, есть

$$S=\int ds=\int\limits_0^t\sqrt{\frac{g^2r^2}{c^2}dt^2-dr^2}=\int\limits_0^t\sqrt{\frac{g^2r^2}{c^2}-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\,dt=\frac{c^2}{g}\operatorname{th}\frac{gt}{c}. \quad (22.2.3)$$

При $t\to\infty$ собственное время $\tilde{t}$ конечно. Дальнейшая «жизнь» частицы после достижения $r=0$ за конечное собственное время $\tilde{t}$ не описывается в данной системе, хотя сама мировая линия частицы не встречает здесь никаких особенностей пространства-времени и продолжается дальше (точечная линия выше линии $r=ct$ на рис. 61). Такие системы получили название геодезически неполных, ибо некоторые геодезические (например, рассмотренные выше) охватываются ими лишь частично.

Итак, сингулярности в геодезически неполных системах могут быть устранены переходом к другой системе отсчета. Нас сейчас интересуют истинные «инвариантные» неустранимые сингулярности пространства-времени. На первый взгляд, следует называть истинной сингулярностью в пространстве-времени место, где инварианты тензора R_{iklm}, описывающие кривизну и не зависящие от выбора системы отсчета, достигают бесконечно больших значений (хотя бы один из них) *). В этих местах могут нарушаться законы ОТО. Можно ли от такой сингулярности избавиться, просто вырезав кусок пространства-времени вокруг сингулярности? Конечно, такое пространство-время с «дыркой» следует тоже считать сингулярным, хотя в нем нет бесконечных кривизн, но в края дырки упираются мировые линии частиц, и частицы должны здесь «исчезать» или «рождаться». Можно было бы попытаться исключить возможности «дырок», требуя односвязности пространства-времени. Но известно, что возможно многосвязное пространство-время, которое со всех точек зрения следует считать регулярным, в нем нет границ «дырок».

Наиболее естественно считать пространство-время без сингулярности, если все времениподобные мировые линии (а также нулевые) можно было бы продолжать в прошлое и будущее неограниченно до бесконечно собственной длины (для нулевых линий до бесконечного аффинного параметра). Это означало бы, что частицы и фотоны движутся по любым возможным для них путям и нигде не возникают спонтанно и не исчезают ни в прошлом, ни в будущем. В таком пространстве-времени нет ни бесконечных кривизн, ни «дырок». Однако такое требование для мировых линий заведомо слишком сильно и невыполнимо даже в бесконечном плоском евклидовом пространстве-времени.

Действительно, времениподобная мировая линия, достаточно быстро приближающаяся по направлению к нулевой линии (траектории света), будет иметь конечную длину. Но частица, движущаяся по такой линии, будет испытывать неограниченно нарастающее ускорение.

Пусть, например, частица набирает скорость по закону

$$v=c\sqrt{1-1/\mathrm{ch}^4\frac{gt}{c}}\,, \tag{22.2.4}$$

где g — постоянная размерности ускорения (но не ускорение самой частицы!). Тогда собственное время частицы T, протекшее после

---

*) О вычислении инвариантов тензора кривизны см. Петров (1966).

начала ее движения, есть

$$T=\int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt=\frac{c}{g}\,\mathrm{th}\,\frac{gt}{c}. \tag{22.2.5}$$

При $t\to\infty$ $T\to\frac{c}{g}<\infty$.

Для ускорения частицы в собственной системе отсчета, т. е. для испытываемой частицей силы на единицу массы, вычисления (см. ТТ и ЭЗ) дают

$$F=\frac{c}{t}\sqrt{\mathrm{ch}^4\frac{gt}{c}-1}. \tag{22.2.6}$$

Ускорение частицы равно нулю при $t=0$ и стремится к бесконечности, когда $t\to\infty$.

Можно считать, что бесконечные ускорения нефизичны, частицы не могут двигаться с неограниченно нарастающим ускорением.

Тогда мы приходим к следующему определению: пространство-время не сингулярно, если любые геодезические времениподобные (т. е. линии для частиц, движущихся без ускорений в собственной системе отсчета) или нулевые линии неограниченно продолжимы в будущее и прошлое до бесконечной собственной длины (до бесконечного аффинного параметра для нулевых геодезических). Такое пространство-время называют причинно геодезически полным. Требования полноты представляются минимально необходимыми для того, чтобы считать пространство-время не содержащим сингулярностей *).

Надо сразу же оговориться, что пространство-время, не удовлетворяющее этим требованиям, т. е. пространство-время с сингулярностью, не обязательно содержит точки с бесконечной кривизной или «дырки», в которые упираются геодезические. Построены примеры, в которых времениподобная геодезическая быстро подходит к нулевой геодезической и имеет конечную собственную длину.

Но, конечно, с физической точки зрения любое пространство-время, в котором геодезическая мировая линия частицы не может быть неограниченно продолжена по собственному времени этой частицы, следует считать сингулярным, приводящим к нарушению законов сохранения. Мы будем придерживаться этого определения.

Теорема Хоукинга — Пенроуза (1970) в применении к космологической проблеме читается следующим образом.

Теорема. Пространство-время M, как кусочно-гладкое дифференцируемое многообразие, не может быть причинно геодези-

*) Заметим, что для описания полного пространства-времени может быть недостаточно одной несингулярной системы отсчета, а потребуются перекрывающиеся системы отсчета, составляющие, как говорят, «полный атлас карт» [см. об этом Пенроуз (1968)].

чески полным, если выполняются уравнения ОТО и следующие условия:

1) M не содержит замкнутых времениподобных кривых;

2) для уравнения состояния справедливы условия

$$\varepsilon+\sum P_\alpha\geqslant 0,\quad \varepsilon+P_\alpha\geqslant 0, \tag{22.2.7}$$

где ε — плотность энергии, P_α ($\alpha=1,\ 2,\ 3$) — три главных значения тензора давления (так называемая энергодоминантность);

3) на каждой времениподобной или нулевой геодезической есть хотя бы одна точка, для которой

$$K_{[a}R_{b]cd[e}K_{f]}K^cK^d\neq 0, \tag{22.2.8}$$

где K_d касателен к кривой в данной точке, [ab] — знак альтернирования;

4) M содержит либо а) точку p, для которой все пучки расходящихся лучей при прослеживании их в прошлом начинают сходиться, либо б) компактную пространственноподобную гиперповерхность.

Разберем условия теоремы.

Требование 1) представляется естественным. Наличие замкнутых линий времени нарушает причинность, и существование таких линий само по себе означало бы некую «сингулярность». Хоукинг и Пенроуз (1970) подчеркивают, что в работе Хоукинга (1966б) доказана теорема о существовании сингулярности в расширяющемся замкнутом мире без условий относительно замкнутых линий времени. Однако там требовалось, чтобы на некоторой компактной пространственноподобной поверхности все вещество расширялось. Формально такая теорема неприменима ко Вселенной (даже если считать ее замкнутой), в которой есть коллапсирующие тела. Эта тонкость существенная для математического доказательства, однако для астрофизика теорема является очень сильным аргументом в пользу того, что образование замкнутых линий времени не есть способ избежать сингулярности.

Требование 2) всегда выполнено для всех известных видов вещества и полей в условиях, когда кривизна пространства-времени далека от «планковских» значений (10^{-33} $см^{-2}$).

Требование 3) чисто математическое. Оно, по-видимому, справедливо в любом невырожденном решении, и появление геодезической со столь вырожденными свойствами, чтобы вдоль нее всегда выполнялось (22.2.8), вряд ли может быть способом избежать сингулярности. Наконец, требования 4), по существу, являются теми глобальными физическими условиями, которые приводят к появлению сингулярности. Эти условия утверждают, что тяготение всей материи настолько сильно, что сингулярность неизбежна. Условие 4а), в принципе, непосредственно проверяется наблюдениями. Реально это условие может быть проверено комбинацией наблюдательных данных и простейших вычислений. Например, если доказать, что это условие выполняется во фридмановской модели, а затем показать, что, согласно наблюдениям, фридмановская модель применима в прошлом вплоть до момента, когда лучи начинают вновь сходиться (и условие сходимости сохраняется в этой слегка возмущенной модели), то тем самым доказывается выполнение условий 4а).

Мы рассматривали проблему сходимости лучей в прошлом в § 3 гл. 3. При однородном распределении вещества и $\Omega=1$, как следует из формул § 3 гл. 3, при красных смещениях порядка $z\approx1$ лучи начинают сходиться. Даже если считать, что средняя плотность материи во Вселенной $\Omega=0{,}03$, вся материя входит в галактики и пучки света, не встречающие ни одной галактики, не сходятся в прошлом для z, превышающих 1, то все равно, перейдя к еще большим $z>10$—20, мы приходим к условиям, когда любые пучки света должны сходиться, и в это время Вселенная расширялась по Фридману. Таким образом, условие 4а) выполняется в реальной Вселенной.

Следовательно, расширение Вселенной начиналось от сингулярности, во всяком случае постольку, поскольку применимы уравнения ОТО. К сожалению, теорема Хоукинга — Пенроуза практически ничего не говорит нам о структуре сингулярности *). Она просто утверждает, что по крайней мере одна мировая геодезическая линия частицы или фотона непродолжима неограничено в прошлое (или будущее). Несмотря на возможные экзотические примеры, когда пространство-время подобным образом геодезически неполно, а бесконечных кривизн в нем все же нет, практически все специалисты считают, что в общем невырожденном случае сингулярность означает бесконечную кривизну пространства-времени. Нерешенными в этой теореме остаются следующие вопросы: вся ли материя проходила в прошлом через сингулярное состояние или только часть ее и как проходило расширение вблизи самой сингулярности? Вторая из этих проблем разбирается в следующем параграфе **).

§ 3. Общее космологическое решение с сингулярностью

В § 1 мы уже подчеркивали, что при рассмотрении космологической сингулярности в прошлом в начале расширения нет специальных оснований предполагать, что характер расширения описывается наиболее общим решением, а не каким-нибудь специальным, вырожденным. Характер расширения в этом случае определяется начальными условиями в сингулярности, которых мы не знаем и

---

*) Строго говоря, она даже не говорит, была ли сингулярность в прошлом, а не в будущем! [См. оригинальную работу Хоукинга и Пенроуза (1970).]

**) Интересная возможность избежать космологической сингулярности рассмотрена Траутманом (1973) в теории Эйнштейна — Картана, учитывающей влияние спина на геометрию.