бинацией наблюдательных данных и простейших вычислений. Например, если доказать, что это условие выполняется во фридмановской модели, а затем показать, что, согласно наблюдениям, фридмановская модель применима в прошлом вплоть до момента, когда лучи начинают вновь сходиться (и условие сходимости сохраняется в этой слегка возмущенной модели), то тем самым доказывается выполнение условий 4а).

Мы рассматривали проблему сходимости лучей в прошлом в § 3 гл. 3. При однородном распределении вещества и $\Omega=1$, как следует из формул § 3 гл. 3, при красных смещениях порядка $z\approx 1$ лучи начинают сходиться. Даже если считать, что средняя плотность материи во Вселенной $\Omega=0{,}03$, вся материя входит в галактики и пучки света, не встречающие ни одной галактики, не сходятся в прошлом для z, превышающих 1, то все равно, перейдя к еще большим $z>10$—20, мы приходим к условиям, когда любые пучки света должны сходиться, и в это время Вселенная расширялась по Фридману. Таким образом, условие 4а) выполняется в реальной Вселенной.

Следовательно, расширение Вселенной начиналось от сингулярности, во всяком случае постольку, поскольку применимы уравнения ОТО. К сожалению, теорема Хоукинга — Пенроуза практически ничего не говорит нам о структуре сингулярности *). Она просто утверждает, что по крайней мере одна мировая геодезическая линия частицы или фотона непродолжима неограничено в прошлое (или будущее). Несмотря на возможные экзотические примеры, когда пространство-время подобным образом геодезически неполно, а бесконечных кривизн в нем все же нет, практически все специалисты считают, что в общем невырожденном случае сингулярность означает бесконечную кривизну пространства-времени. Нерешенными в этой теореме остаются следующие вопросы: вся ли материя проходила в прошлом через сингулярное состояние или только часть ее и как проходило расширение вблизи самой сингулярности? Вторая из этих проблем разбирается в следующем параграфе **).

§ 3. Общее космологическое решение с сингулярностью

В § 1 мы уже подчеркивали, что при рассмотрении космологической сингулярности в прошлом в начале расширения нет специальных оснований предполагать, что характер расширения описывается наиболее общим решением, а не каким-нибудь специальным, вырожденным. Характер расширения в этом случае определяется начальными условиями в сингулярности, которых мы не знаем и

*) Строго говоря, она даже не говорит, была ли сингулярность в прошлом, а не в будущем! [См. оригинальную работу Хоукинга и Пенроуза (1970).]

**) Интересная возможность избежать космологической сингулярности рассмотрена Траутманом (1973) в теории Эйнштейна — Картана, учитывающей влияние спина на геометрию.

которые могут определить характер расширения в соответствии с каким-либо специальным решением, а не наиболее общим. Одну из таких возможностей — интенсивное рождение пар частиц — античастиц вблизи сингулярности, приводящее к изотропному расширению,— мы рассмотрим далее. Но, конечно, решение, описывающее наиболее общий характер расширения от сингулярности, представляет громадный интерес для понимания того, что могло происходить, и, следовательно, для выяснения тóго, что происходило в действительности. Помимо этого, следует подчеркнуть, что именно общее решение описывает коллапс — сжатие к сингулярности космологической модели (если расширение сменяется сжатием, т. е. если $\rho > \rho_c$), а также и коллапс отдельного тела, сжавшегося под свой гравитационный радиус (см. ТТ и ЭЗ).

Общее решение вблизи сингулярности было построено Белинским, Лифшицем, Халатниковым (1972). В данном параграфе излагаются результаты их работы. Оказалось, что в общем случае при приближении к сингулярности решение, описывающее деформацию, имеет локально, в окрестности каждой точки, тот же характер, что и в модели типа IX или VIII Бианки (модель «перемешанного» мира). Решение состоит из чередующихся «казнеровских эпох» и описывает осцилляционный режим приближения к сингулярности.

Для удобства изложения мы здесь будем описывать сжатие — коллапс. Для описания расширения нужно изменить знак времени.

Общее решение строится следующим образом. Еще в работе Лифшица и Халатникова (1963а, б) приведено так называемое обобщенное решение Казнера. Это решение локально описывает деформацию согласно решению Казнера [см. (18.3.6), (18.3.7)]. Но направление главных осей деформации и величина казнеровских показателей степени p_1, p_2, p_3 меняются от точки к точке трехмерного пространства. Метрика обобщенного казнеровского решения записывается в синхронной системе отсчета в виде

$$g_{\alpha\beta} = a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta, \tag{22.3.1}$$

$$a \sim t^{p_l}, \qquad b \sim t^{p_m}, \qquad c \sim t^{p_n}, \tag{22.3.2}$$

$$p_l + p_m + p_n = p_l^2 + p_m^2 + p_n^2 = 1. \tag{22.3.3}$$

Греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3; p_l, p_m, p_n— функции пространственных координат; пространственные векторы $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ — тоже функции пространственных координат, они являются единичными векторами. Выпишем теперь уравнения Эйнштейна для синхронной системы отсчета (скорость света равна 1):

$$-\frac{\partial}{\partial t} D_\alpha^\alpha - D_\alpha^\beta D_\beta^\alpha = 8\pi G\left(T_0^0 - \frac{1}{2} T\right), \tag{22.3.4}$$

$$D_{\alpha;\,\beta}^\beta - D_{\beta;\,\alpha}^\beta = 8\pi G T_\alpha^0, \tag{22.3.5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} D_\alpha^\beta) - p_\alpha^\beta = 8\pi G\left(T_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta T\right). \tag{22.3.6}$$

Здесь $\dot{D}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}$; точка с запятой означает ковариантное дифференцирование в трехмерном пространстве с метрикой $g_{\alpha\beta}$; $P_{\alpha\beta}$ — трехмерный тензор кривизны Риччи, построенный из $g_{\alpha\beta}$.

Мы будем исследовать решение уравнений Эйнштейна вблизи сингулярности. Оценки показывают, что в этом случае компонентами тензора энергии-импульса в уравнениях (22.3.4) и (22.3.6) можно пренебречь по сравнению с членами в левых частях уравнений («вакуумная стадия»). Уравнение (22.3.5) пока рассматривать не будем. Оно позволяет вычислить распределение и движение материи после того, как решение для $g_{\alpha\beta}$ уже найдено. Итак, рассмотрим уравнения (22.3.4), (22.3.6) без правых частей. Если в (22.3.6) пренебречь p_α^β, т. е. считать $p_\alpha^\beta=0$, то решение (22.3.4), (22.3.6) будет обобщенное казнеровское решение (22.3.1) — (22.3.3). Предположим, что на некотором интервале изменения t решение (22.3.1) — (22.3.3) справедливо и p_α^β можно пренебречь. Будем продолжать решение к сингулярности $t\to 0$ и определим границу применимости (22.3.1) — (22.3.3). Для этого мы в каждой точке трехмерного пространства будем проектировать все тензоры на направления векторов $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$. Для того чтобы решение (22.3.1) — (22.3.3) удовлетворяло уравнениям (22.3.4), (22.3.6), надо, чтобы диагональные проекции тензора Риччи были меньше остальных слагаемых в (22.3.6), а эти слагаемые имеют порядок $1/t^2$. Поэтому должны выполняться условия

$$p_l^l < t^{-2}, \qquad p_m^m < t^{-2}, \qquad p_n^n < t^{-2}. \tag{22.3.7}$$

Что касается недиагональных компонент, то, как показывает анализ [см. оригинальную работу Белинского, Лифшица, Халатникова (1972)], ими воообще можно пренебречь в главном порядке всегда при продолжении решения к сингулярности, если только ими можно было пренебречь в начальный момент *). Итак, в главных порядках мы должны рассматривать четыре уравнения: для нулевой компоненты (22.3.4) и три диагональные проекции ll, mm, nn уравнений (22.3.6).

В диагональных проекциях тензоров Риччи p_l^l, p_m^m, p_n^n есть члены вида

$$A=\left(\frac{\boldsymbol{l}\operatorname{rot} a\boldsymbol{l}}{bc\boldsymbol{l}\,[\boldsymbol{mn}]}\right)^2 \tag{22.3.8}$$

и такие же члены с круговой заменой вектора $\boldsymbol{l}$ на $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ и соответствующих скалярных функций a, b, c.

В обобщенном казнеровском решении одна из функций a, b, c растет, а две другие падают, когда $t\to 0$. Пусть растущей будет a.

---

*) Надо все время помнить, что мы исследуем общее решение. Конечно, всегда возможны те или иные вырожденные случаи, но они требуют специального подбора начальных условий, и мы сейчас на них не останавливаемся.

Подстановка (22.3.2), (22.3.3) в (22.3.8) показывает, что этот член A при уменьшении t растет, как

$$A \sim t^{-2(|p_1|+1)}. \tag{22.3.9}$$

Величина в скобках в показателе (22.3.9) больше 1, т. е. A растет быстрее t^{-2} при $t \to 0$. Поэтому в некоторый момент член A сравняется с остальными членами уравнения (22.3.6), которые росли, как t^{-2}, и применимость казнеровского решения нарушится. В эту эпоху надо учитывать влияние на решение члена A. Четыре уравнения: 0—0, $l - l$, $m - m$, $n - n$ (которые только и важны в главных порядках) — теперь запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\ddot{c}}{c}=0, \\ &\frac{[(\dot{a})\,bc]^{\cdot}}{abc}+\frac{\lambda^2a^2}{2b^2c^2}=0, \\ &\frac{[a\,(\dot{b})\,c]^{\cdot}}{abc}-\frac{\lambda^2a^2}{2b^2c^2}=0, \\ &\frac{[ab\,(\dot{c})]^{\cdot}}{abc}-\frac{\lambda^2a^2}{2b^2c^2}=0, \end{aligned}\right\} \tag{22.3.10}$$

где $\lambda=\dfrac{(\boldsymbol{l}\operatorname{rot}\boldsymbol{l})}{(\boldsymbol{l}\,[\boldsymbol{mn}])}$, а точка означает дифференцирование по t. Эти уравнения совпадают с соответствующими уравнениями для модели типа IX Бианки (§ 4 гл. 21) для периода, когда одна казнеровская эпоха сменяется другой. Единственное отличие состоит в том, что в уравнениях (23.3.10) λ есть функция пространственных координат. Однако для локальных свойств решения это не имеет значения. Поэтому смена «казнеровских эпох» происходит точно так же, как и в модели «перемешанного» мира. В итоге эволюция при приближении t к нулю локально в каждой точке происходит качественно так же, как и в модели «перемешанного» мира, описанной в § 4 гл. 21.

Следует только добавить, что учет недиагональных проекций уравнения (22.3.6) (которые являются величинами следующего порядка малости) приводит к следующему выводу. При смене «казнеровских эпох» поворачиваются также направления векторов $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ в каждой точке. Заметим, что такой же поворот имеется и в случае однородной модели типа IX, когда вещество движется относительно модели.

Итак, локально, в каждой точке пространства, в общем случае при приближении к сингулярности решение, описывающее метрику, имеет осциллирующий характер и изображено на рис. 57.

Для описания расширения от сингулярности надо изменить знак времени.

В заключение параграфа еще раз подчеркнем, что начало расширения Вселенной вовсе не обязательно описывалось общим решением. Об этом подробно говорилось в начале параграфа.