

ражения, в принципе, могут (подчеркнем, что в настоящее время мы находимся на уровне гипотез) привести к следствиям, существенным для поздних стадий.

В такой концепции остается, однако, без объяснения величина энтропии. Другой подход к этой проблеме описан в § 9 этой главы.

В теории хотелось бы иметь объяснение всех важнейших свойств Вселенной. Однако, в частности, без объяснения остается спектр возмущений, приводящих к образованию галактик. Конформная инвариантность строго доказана для уравнений Дирака (для нейтрино, а также — в пределе больших импульсов, $p \gg mc$, — и для других частиц со спином $1/2$) и для электромагнитных уравнений Максвелла. Ситуация сложнее для гравитационных волн (см. § 18 этой главы).

Вопросы, затронутые здесь в общих чертах, качественно, ниже рассматриваются количественно, с формулами*).

Авторы не обольщаются: математическое изложение гипотез не делает их в действительности надежными и доказанными, поскольку некоторые самые глубокие вопросы остаются без ответа.

§ 5. Рождение заряженных частиц в электродинамике

Рождение частиц в гравитационных полях является чрезвычайно экзотическим процессом с точки зрения лабораторной физики; нет надежды на экспериментальное изучение процесса в ближайшем будущем. Между тем рождение частиц в электромагнитных полях наблюдается экспериментально. Теоретические предсказания современной квантовой электродинамики проверены и подтверждены на опыте. Поэтому квантовую электродинамику можно считать «старшим братом», хорошим примером для теории квантово-гравитационных явлений. Напомним вкратце, какие идеи и результаты известны в электродинамике; значительная часть их имеет свои аналоги в теории гравитации.

Ни читатель, ни авторы не должны иметь и не имеют иллюзий — нижеследующее не научит вычислять эффекты, не заменит учебники, такие, например, как учебники Ахиезера и Берестецкого (1969), Берестецкого, Лифшица, Питаевского (1968). Экспериментально хорошо изучена аннигиляция $e^+ + e^- = 2\gamma$. По общим принципам квантовой теории отсюда следует также возможность обратного процесса $2\gamma \rightarrow e^+ + e^-$. Если кинетические энергии e^+ , e^- в системе ц. и. порядка mc^2 (e^+ и e^- релятивистские, но не ультрарелятивистские), то сечения прямого и обратного процессов одного порядка, а именно порядка $\frac{e^4}{m^2c^4} = r_0^2$, где r_0 — так называемый «классический радиус» электрона ($e^2/r_0 = mc^2$). На языке диаграмм рождение пар описывается рис. 62.

*) О применении гамильтонова формализма см. Райан (1972).

Развитие событий во времени происходит снизу вверх. Волнистые линии представляют собой «входящие» в реакцию фотоны. Прямая линия изображает движение электрона. Позитрон можно описывать как «электрон, движущийся по времени в противоположную сторону». Зависимость волновых функций от времени определяется множителем $e^{-iEt/\hbar}$. Изменение знака времени (направления стрелки) эквивалентно изменению знака энергии. Позитрон, по Дираку, есть дырка в море электронов с отрицательной энергией. Эти соображения не есть доказательство, но, может быть, они помогут интуитивно примириться с тем, что позитрон — нормальный, движущийся вперед во времени — можно описывать линией электрона, движущегося вспять из будущего в прошлое.

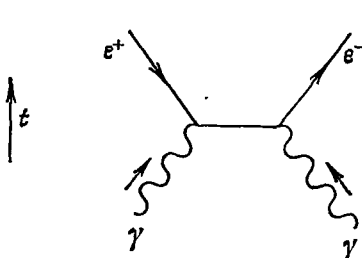


Рис. 62. Диаграмма Фейнмана для рождения пар e^+e^- .

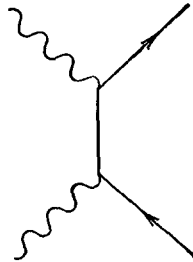


Рис. 63. Диаграмма рассеяния фотона на свободном электро-не.

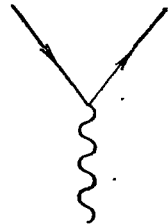


Рис. 64. Рождение пары e^+e^- меняющимся электриче-ским полем.

В процессе участвуют два фотона, есть две «вершины» — две точки, в которых сходятся одна фотонная и две электронные линии. В каждой вершине взаимодействие пропорционально заряду электрона e , итого при двух вершинах матричный элемент пропорционален e^2 , сечение или вероятность процесса пропорциональны e^4 . Заметим, что, «положив на бок» диаграмму рис. 62, получим рис. 63 — диаграмму для процесса $e^- + \gamma = e^- + \gamma$, т. е. комптоновского рассеяния фотона на свободном электро-не. Два процесса — рождение пар и рассеяние — тесно связаны.

Существует ли рождение пар в более низком, первом порядке, т. е. по диаграмме рис. 64? Вершина типа рис. 64 возможна, но при этом необходимо, чтобы электромагнитное поле, которое изображено волнистой линией, не было полем свободного фотона, полем свободно распространяющейся электромагнитной волны. Свободный фотон характеризуется релятивистским соотношением между энергией E и импульсом p , $E=pc$, поскольку скорость его равна скорости света c . Рождение пары e^+e^- , у которой $E_+ + E_- > (p_+ + p_-)c$, свободным фотоном несовместимо с законами сохра-нения.

Однако это не значит, что процесс с вершиной типа рис. 64 вообще невозможен. Энергия фотона задана и везде одинакова, если задана частота колебаний системы, излучающей фотон. Импульс фотона задан (и соответствует вышеприведенной формуле) только вдали от излучающей системы. На расстоянии r неопределенность импульса порядка $\Delta p = \frac{\hbar}{r}$. Поэтому электромагнитное поле вблизи излучающей системы (на расстоянии порядка $\frac{c}{\omega}$, что в случае $\hbar\omega \sim 2mc^2$ даст характерную длину $\frac{\hbar}{mc}$) способно рождать пары по типу рис. 64.

Более того, таким образом могут рождаться пары e^+e^- и в том случае, когда излучения реальных фотонов (способных уйти на бесконечность) вообще нет!

Такая ситуация возникает при 0—0-переходах. Здесь первый нуль есть спин возбужденной системы, второй нуль — спин системы в основном состоянии. Нулевой спин означает полную сферическую симметрию системы. Классически можно представить себе сферически-симметричное заряженное облако, совершающее радиальные колебания. Внешнего излучения, очевидно, нет — ведь поле излученной волны должно быть поперечно (перпендикулярно направлению распространения). Однако электрическое поле внутри облака есть, и оно периодически изменяется. Такое поле способно вызвать рождение пары. Процесс наблюдается на опыте; хорошо известны возбужденные состояния ядер углерода C^{12} и кислорода O^{16} , превращающиеся в основное состояние путем испускания пары e^+e^- .

Во всех случаях, изложенных выше, энергия фотона (или фотонов) — свободного или несвободного — превышает сумму масс частиц e^+ и e^- , иначе рождение было бы энергетически невозможно. Но у фотонов энергия связана с частотой: $E = \hbar\omega$. Значит, необходима достаточно высокая частота поля: $\omega > \frac{2mc^2}{\hbar}$ или $\omega_1 + \omega_2 > \frac{2mc^2}{\hbar}$.

Квантовая природа фотонов здесь несущественна!

Представим себе когерентную электромагнитную волну такого типа, как испускается лазером. С одной стороны, можно сказать, что число заполнения N — число фотонов на одной моде электромагнитного поля — велико. Но при $N \gg 1$ можно говорить о классической электромагнитной волне. Если вероятность процесса подсчитана для одного фотона (или для двух встречных фотонов), то при переходе к N -фотонному состоянию вероятность увеличивается в N раз (в $N_1 N_2$ раз при столкновении двух пучков с числами заполнения N_1 и N_2).

Таким образом, получается выражение для вероятности рождения пар в классических электромагнитных полях — пропорциональное плотности энергии, т. е. E^2 для рис. 64 и пропорциональ-

ное E^4 для рис. 62 (в последнем случае не различаем $E_1 \sim E_2 \sim E$ в двух встречных лучах). Поле должно быть высокочастотным: $\omega > \frac{2\hbar}{mc^2}$ в случае рис. 64, $\omega > \frac{\hbar}{mc^2}$ в случае рис. 62. В такой теории условие на частоту, содержащее постоянную Планка \hbar , есть следствие применения квантовой механики к электронам и позитронам.

Возможно ли рождение пар статическим полем с $\omega=0$? Такой процесс возможен, но он имеет принципиально иной механизм. Представим себе постоянное (в пространстве и во времени) электрическое поле \mathcal{E} . Пусть в точке x_0 родилась пара (для этого нужна энергия $2mc^2$). Перемещение позитрона из x_0 в x_1 сопровождается выделением энергии $e\mathcal{E}(x_1-x_0)$. Перемещение электрона из x_0 в x_2 сопровождается выделением энергии $-e\mathcal{E}(x_2-x_0)$ *). Таким образом, необходимая затрата энергии при рождении покоящегося позитрона в x_1 и покоящегося электрона в x_2 есть

$$\Delta E_0 = 2mc^2 - e\mathcal{E}(x_1 - x_2). \quad (23.5.1)$$

Если $x_1 - x_2$ мало, процесс невозможен без какого-то дополнительного источника энергии. Если $x_1 - x_2 > \frac{2mc^2}{e\mathcal{E}}$, то $\Delta E_0 < 0$, но из положения легко выйти: на таком расстоянии электрон и позитрон движутся с конечной скоростью, энергия каждого из них больше mc^2 .

Таким образом, рождение пар статическим полем энергетически возможно. Однако при этом первое условие заключается в том, чтобы область пространства, занятая полем, была достаточно велика (разность потенциалов больше $\frac{2mc^2}{e}$ — больше 10^6 в). При этом e^+ и e^- рождаются на определенном расстоянии и лишь после этого ускоряются. Очевидно, что классически нельзя себе представить одновременное возникновение разных зарядов в разных точках пространства. Нарушается не только причинная связь, нарушается (в каждой точке в отдельности — не в системе в целом) сохранение заряда при попытке классического описания процесса.

Следовательно, для понимания процесса и здесь необходима квантовая механика движения электрона и позитрона. Область пространства (при малых $x_1 - x_2$), где электрон и позитрон по энергетическим соображениям не могут находиться классически, они проходят туннельно, под барьером. Из этих соображений можно определить вероятность рождения пары: главный множитель есть

$$W \sim \exp\left(-\frac{\beta \Delta x mc}{\hbar}\right), \quad \text{где } \Delta x = \frac{2mc^2}{e\mathcal{E}} \text{ — ширина барьера, } \frac{\hbar}{mc} \text{ — ха-}$$

*) Представьте себе, что они родились в x_0 , а потом перемещались; энергетический баланс зависит от их пути.

рактерная длина волны ($3,7 \cdot 10^{-11}$ см), β — численный коэффициент порядка единицы. Характерное поле, при котором вероятность рождения не слишком мала, порядка 10^{18} в/см.

Такой процесс до сих пор не наблюдался. Развитие лазерной техники позволяет надеяться на его осуществление в ближайшие 10—20 лет *).

Подробные расчеты процесса проделали Никишов (1969), Нарожный и Никишов (1970). В непосредственной близости к атомному ядру электрическое поле значительно больше приведенной выше характерной величины; около ядра урана поле достигает 10^{18} в/см! Однако поле ядра быстро убывает с расстоянием. Поэтому спонтанное рождение пар e^+e^- в поле ядра могло бы происходить лишь для гипотетических ядер с зарядом (атомным номером) больше 170.

Рождение пар в электромагнитном поле тяжелых ядер рассмотрено в обзоре Зельдовича и Попова (1971), там же см. ссылки на оригинальные работы. Рождение пар статическим полем нельзя представить в виде суммы диаграмм типа рис. 64 (с одной фотонной линией), рис. 62 (с двумя фотонными линиями) и т. д. **).

Обратимся к предельному случаю низкочастотного слабого поля, т. е. к условиям, когда можно пренебречь рождением реальных пар электронов и позитронов. Квантовая механика предсказывает своеобразное явление — виртуальное рождение пар. Наглядно можно представить себе, что пары рождаются и тут же исчезают. Нет свободных заряженных частиц, но все же в среднем по времени появляются плотность заряда и электрический ток, отличные от нуля. Это явление принято называть «поляризацией вакуума». Полезно обратиться к принципиальным основам. Теория элементарных заряженных частиц симметрична относительно знака заряда. «Положительный» знак заряда позитрона — это условность, преобладание электронов и протонов (по крайней мере в нашей окрестности, см. главу о зарядовой симметрии) отражает начальные условия Вселенной, а не локальные законы физики.

Отсюда следует, что вакуум должен быть электрически нейтральным.

*) Отметим, что в плоской волне какой бы то ни было интенсивности рождение пар невозможно. Это видно уже из того, что при определенном преобразовании Лоренца (т. е. для наблюдателя, движущегося в направлении распространения волны) напряженность электрического и магнитного поля данной волны может быть сделана как угодно малой. Для того чтобы с помощью лазерного луча рождал пары, надо столкнуть два встречных сфокусированных пучка лучей. Вопрос рассмотрен, в частности, Багровым, Бозриковым, Гитманом (1973).

**) Формально это проявляется в том, что вероятность процесса
$$W \sim \exp\left(-\frac{E_c}{E}\right)$$
 нельзя разложить в ряд по степеням E .

Однако электрические и магнитные поля, очевидно, нарушают зарядовую симметрию вакуума *). При наличии полей появляются заряды и токи. Эти заряды и токи должны выражаться через электромагнитные поля**). При этом самые общие свойства—векторный и тензорный характер рассматриваемых величин, инвариантность теории относительно калибровки потенциала и т. п.— сильно ограничивают вид формул, связывающих поля и вакуумные токи.

Будем характеризовать поле с помощью 4-вектора $A_i = (A_\mu, A_0 = \varphi)$. Наряду с A_i векторами являются также $\square A_i$ $\square \square A_i$ и т. д.— пока мы ограничиваемся величинами, линейными по полю. Следовательно, для вакуумного тока можно предложить формулы (индекс в скобках «в» — вакуум)

$$j_{(в)} = \alpha_0 A, \quad j_{(в)} = \alpha_1 \square A, \quad j_{(в)} = \alpha_2 \square \square A, \dots \quad (23.5.2)$$

Из них выражение с α_0 отпадает в силу калибровочной инвариантности. Только сами поля, электрическое и магнитное, имеют физический смысл, могут быть локально измерены и однозначно определены; вектор-потенциал A определен неоднозначно, следовательно, соотношение с α_0 не может иметь место.

Любопытна ситуация с α_1 ; согласно уравнениям Максвелла

$$\square A = 4\pi j = 4\pi (j_{вн} + j_{(в)}). \quad (23.5.3)$$

В правой части стоит полный ток, т. е. сумма «внешнего» тока заряженных частиц $j_{вн}$ и вакуумного тока $j_{(в)}$. Если, в свою очередь, $j_{(в)}$ выражается формулой с α_1 , то получим

$$\square A = 4\pi j_{вн} + 4\pi \alpha_1 \square A, \quad \square A = 4\pi j_{вн} / (1 - 4\pi \alpha_1) = 4\pi j_{набл}. \quad (23.5.4)$$

Все формулы электродинамики сохраняются, но вместо $j_{вн}$ фигурирует пропорциональная ему величина $j_{набл}$ (наблюдаемый ток), отличающаяся множителем $(1 - 4\pi \alpha_1)^{-1}$. Наблюдаемый заряд каждой элементарной частицы отличается на тот же множитель от «истинного», «первоначального», «голого» заряда — происходит так называемая перенормировка заряда.

Коэффициент перенормировки одинаков для всех заряженных частиц, определить его экспериментально невозможно; расчет дает $\alpha_1 < 0$, $j_{набл} < j_{вн}$, поляризация вакуума частично экранирует го-

*) Остается филологический вопрос: следует ли называть вакуумом пространство, в котором существует электромагнитное поле? Примем здесь такое соглашение. В вакууме не должно быть свободных заряженных частиц, хотя и не исключено электромагнитное поле, а следовательно, присутствие фотонов. Таким образом, здесь следовало бы точнее сказать «вакуум заряженных частиц». В основных главах, посвященных теории тяготения, «вакуумом» называется пространство, в котором отсутствуют какие бы то ни было свободные частицы и поля.

**) Об эффективных зарядах, появляющихся при рассмотрении уравнений Максвелла в кривом пространстве, см. Зельдович (1972в).

мый заряд. При последовательном проведении расчетов [Ландау, Померанчук (1955)] оказывается, что экранировка расходуется (логарифмически); в этом смысле не существует логически замкнутой, последовательной квантовой электродинамики. Однако можно построить расчеты так, чтобы во все наблюдаемые величины (сечения рассеяния, уровни энергии и т. п.) входил наблюдаемый заряд частиц, и такая теория согласуется с опытом *).

Следующий член формулы с α_2 , дает реально наблюдаемые эффекты. Одной из компонент 4-вектора j является плотность заряда. Формула с α_2 дает вакуумную плотность заряда, отличающуюся (как функция координат) от плотности внешнего заряда. Именно член с α_2 (и, в принципе, следующие) экспериментаторы называют «поляризацией вакуума». Этот член изменяет распределение потенциала около атомного ядра и вследствие этого сдвигает атомные уровни. Такой сдвиг наблюдается в настоящее время. Рассматриваемый эффект составляет около 2,5% всего квантовоэлектродинамического сдвига в атоме водорода. Однако точность расчетов и наблюдений столь велика (лучше 0,01%), что вклад поляризации вакуума установлен вне всяких сомнений.

В ионах с большим зарядом ядра и в особенности в ионах с мюоном вместо электрона на орбите эффект поляризации вакуума еще больше.

Выше рассматривались лишь линейные по потенциалу и полю слагаемые $j_{(в)}$. На языке диаграмм они соответствуют рис. 65: линия электромагнитного поля прерывается образованием виртуальной пары e^+e^- (возникает $j_{(в)}$), затем пара снова превращается в поле — $j_{(в)}$ появляется в правой части уравнения для A . Перенормировку заряда можно рассматривать как следствие того, что фотон (или в более общей формулировке — поле) часть времени проводит в виде пары: поскольку в эту часть времени фотон (поле) не взаимодействует с другими, реальными заряженными частицами, эффективное взаимодействие — а значит, и наблюдаемый заряд — уменьшается.

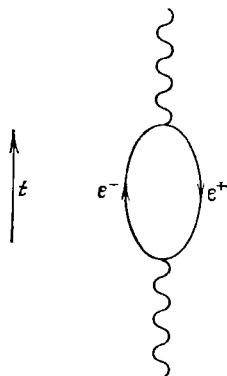


Рис. 65. Образование виртуальной пары e^+e^- .

*) Уточним: не существует теории без параметра обрезания (на малых длинах или на больших импульсах). Однако если такой параметр введен, то отношение $j_{набл}:j_{вн} \sim \left(1 - \frac{2e_{набл}^2}{3\pi\hbar c} \ln \frac{\Lambda}{m_e c}\right)^{1/2}$. Ошибки в теории, в которой фигурирует $e_{набл}$, порядка $\frac{m_e c}{\Lambda}$. Не существует теории с $\Lambda \rightarrow \infty$ («замкнутой»), но существует практически удовлетворительная теория с $m_e c \ll \Lambda \leq m_e c \exp\left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)$.

Наряду с линейными эффектами, есть и слагаемые в плотности заряда, пропорциональные третьей степени электромагнитного поля (и более высоким нечетным степеням). Включая в рассмотрение еще взаимодействие этого $j_{(в)}$ с полем, получим эффекты, соответствующие диаграмме с четырьмя фотонными (полевыми) линиями (рис. 66). Такая диаграмма описывает рассеяние света на свете,

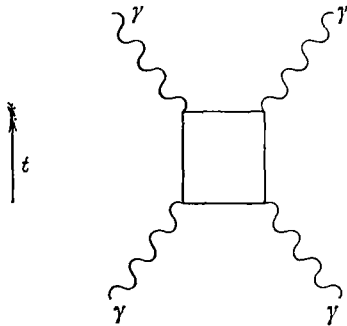


Рис. 66. Нелинейные процессы в электродинамике; рассеяние света на свете.

не наблюдавшееся до сих пор, а также рассеяние света электрическим полем ядра. Последний процесс, предсказанный Дельбрюком, успешно наблюдался в лаборатории.

Эти процессы можно трактовать как нелинейность электродинамики: в лагранжиане появляются члены $\sim (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2)^2$ и $(\mathcal{E}\mathcal{H})^2$ и более высокого порядка. Соответственно в уравнениях Максвелла появляются кубические члены.

В электродинамике есть случаи, когда поле можно рассматривать классически: уже указывалось, что так можно действовать при больших числах заполнения. Не нужно квантовать также электростатическое поле, например кулоновское поле ядра или постоянное магнитное поле. Квантовые эффекты в этих случаях связаны с применением квантовой механики к электронам и позитронам. Однако если условия таковы, что реальное рождение пар не происходит, то эти эффекты можно выразить через мгновенные значения полей и их производных.

В этом смысле говорят о квантовых поправках к уравнениям Максвелла: вакуумный ток выражают через поля и помещают в левую часть уравнений, оставляя в правой части лишь ток реальных частиц:

$$F_{i; k}^k = -4\pi j_i \rightarrow F_{i; k}^k + 4\pi j_{(в) i} = -4\pi j_{i, вн}. \quad (23.5.5)$$

Очевидно, что такая процедура с $j_{(в)} = f(F)$ возможна лишь до тех пор, пока не становится существенным рождение реальных пар.

Эти пары неотличимы от внешних зарядов. Число пар, их движение, создаваемый ими ток — все эти величины зависят от всей предыстории поля, их нельзя выразить через мгновенные локальные величины. Поэтому для задач с рождением пар квантовые эффекты обязательно требуют изменения правой части. Последовательное описание рождения пар включает поляризацию вакуума как первую стадию. Только при совместном рассмотрении поляризации вакуума и рождения пар устраняются парадоксы кажущегося нарушения причинности и локального несохранения заряда. В таком

случае все эффекты — и виртуальные и реальные — рождения пар целесообразно собрать в одном месте, в правой части уравнения, как разные части вакуумного тока.

Вакуумный ток в данный момент в данной точке оказывается сложным нелинейным нелокальным функционалом электромагнитного поля в прошлом, в области влияния, примыкающей к данной точке.

Ток $j_{(в)}$ удовлетворяет принципу причинности и сохранению заряда. В такой концепции можно считать, что уравнения Максвелла не изменяются. Квантовые эффекты создают отличную от нуля правую часть (ток) даже при отсутствии заряженных частиц в исходном состоянии. Именно такая трактовка, приспособленная к случаю больших эффектов и рождения реальных пар, послужит нам моделью при рассмотрении квантовых явлений в гравитационном поле вблизи сингулярности.

Мораль, следующая из истории развития электродинамики, сводится к двум тезисам: 1) рассматриваются те (и только те) эффекты и поправочные члены, которые являются прямым, необходимым, неизбежным следствием неизменного начального предположения об исходном взаимодействии электромагнитного поля с заряженными частицами; 2) опыт во всех деталях подтверждает теоретические выводы, полученные таким путем. Продолжением данного параграфа может служить статья Зельдовича (1972б) в сборнике «Магия без магии».

§ 6. Математическая теория рождения частиц

Данный параграф ориентирован на читателя, интересующегося также и методической стороной теории. Все общезначимые соображения изложены ранее, в § 4; читатель, интересующийся только результатами и общими идеями теории, без ущерба может пропустить нижеследующее. В изложении следуем работе Зельдовича и Старобинского (1971).

Пусть мы имеем пространственно-плоскую однородную метрику вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2, \quad (23.6.1)$$

где a , b , c как функции t в задаче о рождении частиц считаем произвольными. В этой метрике рассмотрим скалярное безмассовое поле, удовлетворяющее конформно-инвариантному уравнению

$$\left(\square - \frac{R}{6} \right) \varphi = 0, \quad (23.6.2)$$

что соответствует лагранжиану

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[g^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} + \frac{R}{6} \varphi^2 \right]. \quad (23.6.3)$$