случае все эффекты — и виртуальные и реальные — рождения пар целесообразно собрать в одном месте, в правой части уравнения, как разные части вакуумного тока.

Вакуумный ток в данный момент в данной точке оказывается сложным нелинейным нелокальным функционалом электромагнитного поля в прошлом, в области влияния, примыкающей к данной точке.

Ток $j_{(в)}$ удовлетворяет принципу причинности и сохранению заряда. В такой концепции можно считать, что уравнения Максвелла не изменяются. Квантовые эффекты создают отличную от нуля правую часть (ток) даже при отсутствии заряженных частиц в исходном состоянии. Именно такая трактовка, приспособленная к случаю больших эффектов и рождения реальных пар, послужит нам моделью при рассмотрении квантовых явлений в гравитационном поле вблизи сингулярности.

Мораль, следующая из истории развития электродинамики, сводится к двум тезисам: 1) рассматриваются те (и только те) эффекты и поправочные члены, которые являются прямым, необходимым, неизбежным следствием неизменного начального предположения об исходном взаимодействии электромагнитного поля с заряженными частицами; 2) опыт во всех деталях подтверждает теоретические выводы, полученные таким путем. Продолжением данного параграфа может служить статья Зельдовича (1972б) в сборнике «Магия без магии».

§ 6. Математическая теория рождения частиц

Данный параграф ориентирован на читателя, интересующегося также и методической стороной теории. Все общефизические соображения изложены ранее, в § 4; читатель, интересующийся только результатами и общими идеями теории, без ущерба может пропустить нижеследующее. В изложении следуем работе Зельдовича и Старобинского (1971).

Пусть мы имеем пространственно-плоскую однородную метрику вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,dx^2 - b^2(t)\,dy^2 - c^2(t)\,dz^2, \qquad (23.6.1)$$

где a, b, c как функции t в задаче о рождении частиц считаем произвольными. В этой метрике рассмотрим скалярное безмассовое поле, удовлетворяющее конформно-инвариантному уравнению

$$\left(\Box - \frac{R}{6}\right)\varphi = 0, \qquad (23.6.2)$$

что соответствует лагранжиану

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[g^{ik}\varphi_{,i}\varphi_{,k} + \frac{R}{6}\varphi^2\right]. \qquad (23.6.3)$$

О происхождении и роли добавки $R/6$, где R — скалярная кривизна, см. работы Пенроуза (1964), Тагирова и Черникова (1968), в которых показано, как эта добавка обеспечивает конформную инвариантность.

Заметим, что простейшие волновые уравнения для поля со спином $^1/_2$ (нейтринное поле) и для векторного поля (уравнения Максвелла) являются конформно-инвариантными без всяких добавок, но рассмотрение их слишком сложно.

Произведем преобразование метрики к более удобным переменным:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}=g_1, \qquad \frac{b}{\sqrt[3]{abc}}=g_2, \qquad \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}=g_3, \\ &d\tau=\frac{dt}{\sqrt[3]{abc}}, \qquad \varphi=\frac{\psi}{\sqrt[3]{abc}}. \end{aligned}\right\} \tag{23.6.4}$$

В новых переменных

$$ds^2=(abc)^{2/3}\left[d\tau^2-g_1^2\,dx^2-g_2^2\,dy^2-g_3^2\,dz^2\right]. \tag{23.6.5}$$

Уравнение для ψ имеет вид (при $g_{1,2,3}$, зависящих только от τ)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}-\frac{1}{g_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{g_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{g_3^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+Q(\tau)\,\psi=0, \tag{23.6.6}$$

где

$$Q(\tau)=\frac{1}{18}\left[\left(\frac{g_1'}{g_1}-\frac{g_2'}{g_2}\right)^2+\left(\frac{g_1'}{g_1}-\frac{g_3'}{g_3}\right)^2+\left(\frac{g_2'}{g_2}-\frac{g_3'}{g_3}\right)^2\right]^{*)}.$$

Пространственная однородность позволяет искать частные решения в виде

$$\psi=e^{ikr}\chi_k(\tau). \tag{23.6.7}$$

Уравнение для χ имеет вид (индекс k опускаем)

$$\chi''+\left[\frac{k_1^2}{g_1^2}+\frac{k_2^2}{g_2^2}+\frac{k_3^2}{g_3^2}+Q(\tau)\right]\chi=0. \tag{23.6.8}$$

Величину $\frac{k_1^2}{g_1^2}+\frac{k_2^2}{g_2^2}+\frac{k_3^2}{g_3^2}$ удобно назвать частотой и обозначить $\omega^2(\tau)$. Конформная инвариантность теории использована выше для того, чтобы уменьшить с трех до двух число функций, от которых нетривиально зависит решение. Действительно, в последнее уравнение входят три функции, но они связаны одним тождеством $g_1g_2g_3=1$.

Решение уравнений ищем по методу Лагранжа, т. е. в виде решений, справедливых в адиабатическом приближении, умноженных на функции времени.

*) Штрих означает дифференцирование по τ.

Итак, по определению

$$\chi_k(\tau)=\frac{\alpha(\tau)}{\sqrt{2\omega}}e^{-i\int\omega\,d\tau}+\frac{\beta(\tau)}{\sqrt{2\omega}}e^{i\int\omega\,d\tau}. \tag{23.6.9}$$

На две функции α и β накладываем дополнительное условие:

$$\chi_k'(\tau)=-i\omega\left(\frac{\alpha(\tau)}{\sqrt{2\omega}}e^{-i\int\omega\,d\tau}-\frac{\beta(\tau)}{\sqrt{2\omega}}e^{i\int\omega\,d\tau}\right). \tag{23.6.10}$$

Сопоставляя с полным выражением для χ_k', получим уравнение, связывающее α' и β'.

С учетом этого уравнения получим окончательно систему

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega}-i\frac{Q}{\omega}\right)e^{2i\int\omega\,d\tau}\beta-i\frac{Q}{2\omega}\alpha,\\ \beta'&=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+i\frac{Q}{\omega}\right)e^{-2i\int\omega\,d\tau}\alpha+i\frac{Q}{2\omega}\beta.\end{aligned}\right\} \tag{23.6.11}$$

Рассмотрим общие свойства системы. Она имеет точный интеграл

$$|\alpha|^2-|\beta|^2=\text{const}. \tag{23.6.12}$$

При итеративном решении, задавшись начальным условием $\alpha=1$, $\beta=0$ при $t=\tau=-\infty$, получим (при малых $\frac{Q}{\omega^2}$ и $\frac{\omega'}{\omega^2}$)

$$\beta=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{\omega'}{\omega}+i\frac{Q}{\omega}\right)e^{-2i\int\omega\,d\tau}d\tau. \tag{23.6.13}$$

Эти свойства имеют ясное истолкование. В классической теории решения $\alpha e^{-i\int\omega\,d\tau+ikr}$ и $\beta e^{i\int\omega\,d\tau+ikr}$ соответствуют распространению волн в противоположных направлениях. Пока $\alpha=\text{const}$, $\beta=0$, имеем одну волну, адиабатически изменяющуюся в переменной метрике.

Условие $|\alpha|^2-|\beta|^2=|\alpha_{-\infty}|^2$ означает, что одновременно рождаются две волны противоположного направления, так что общее количество движения поля не изменяется: если начальная волна несла импульс $ck|\alpha_{-\infty}|^2$, то добавились волны, несущие $ck(|\alpha|^2-|\alpha_{\infty-}|^2)$ и $c(-k)|\beta|^2$; суммарный их вклад равен нулю. Сохранение количества движения является естественным следствием однородности пространства.

Другим проявлением попарного рождения волн является тот факт, что в дифференциальные уравнения, связывающие α и β между собой, входят экспоненты удвоенной частоты. Следовательно, амплитуда β зависит от фурье-компоненты изменения метрики с удвоенной частотой. На квантовом языке можно сказать, что у внешнего гравитационного поля заимствуются порции энергии, равные $2\hbar\omega$, в соответствии с тем, что кванты скалярного поля рождаются парами, с энергией $\hbar\omega$ каждый.

Если бы при $t=-\infty$ была задана стоячая волна вида $\sim\alpha_0 \sin(\omega t+\delta)\sin(\boldsymbol{kr}+\varkappa)$, то при $t=+\infty$ получилась бы также стоячая волна, амплитуда которой может быть больше или меньше начальной амплитуды α_0, в зависимости от начальной фазы.

Возмущение метрики происходит во вполне определенный период времени, характеризуемый видом функций a, b, c. Поэтому в формулировке задачи нет группы сдвига по времени и возникает зависимость от начальной фазы. Результаты для бегущей комплексной волны вида $\alpha_{-\infty} e^{-i\int \omega\, d\tau + i\boldsymbol{kr}}$, очевидно, не зависят от начальной фазы. Изменение энергии бегущей волны под действием возмущения метрики всегда положительно и равно усредненному по фазе δ изменению энергии стоячей волны; оно и вычислено.

Конформная инвариантность теории проявляется в том, что в уравнения входят только разности скоростей расширения, разности постоянных Хаббла по различным осям.

До сих пор рассматривалась задача о классическом поле. После фурье-разложения уравнение, характеризующее амплитуду данной пространственной моды, есть уравнение гармонического осциллятора. Спектр гармонического осциллятора эквидистантен: $E=(^1/_2+n^*)\hbar\omega$, где n^* — целое число. В полном соответствии с этим энергия данной волны может принимать собственные значения $E=\mathrm{const}+n^*\hbar\omega$ в соответствии с числом n^* квантов поля с данным волновым вектором. Хорошо известно, что в случае осциллятора между результатами квантовой и классической теорий есть далеко идущее совпадение. Расчеты по теории квантованных полей (слишком сложные для данной книги) приводят к результатам, совпадающим с классическими, описанными выше, при условии правильного выбора начальной амплитуды $\alpha_{-\infty}$, соответствующей энергии $\frac{\hbar\omega}{2}$.

В космологические задачи входят плотность энергии и другие компоненты тензора энергии-импульса, зависящие от рассматриваемого поля. Эти величины получаются сложением вклада отдельных мод, т. е. интегрированием в пространстве волновых векторов $\boldsymbol{k}$. Такие интегралы оказываются расходящимися, так, например, сумма нулевых энергий $\hbar\omega/2$ всех возможных колебаний бесконечна.

Поэтому возникает необходимость перенормировки теории, притом такой, которая оставляла бы в силе все общие свойства результата. Предлагается каждой данной волне с импульсом $\boldsymbol{k}$ сопоставлять волну с бóльшим импульсом $n\boldsymbol{k}$ и, соответственно, меньшей амплитудой $\alpha_{-\infty}/\sqrt{n}$. Вычитая из энергии $\boldsymbol{k}$-волны энергию $n\boldsymbol{k}$-волны, уничтожим нулевую энергию; аналогично устраняем и другие расходимости. В конечных результатах полагаем $n \to \infty$. Достоинство метода заключается в том, что на всех этапах рассматриваются решения полевых уравнений (и для $\boldsymbol{k}$-волны и для $n\boldsymbol{k}$-волны). Это обеспечивает конформную инвариантность и выполнение законов сохранения.

С другой стороны, $\boldsymbol{k}$-волна подвергается нетривиальному воздействию гравитационного поля, тогда как $n\boldsymbol{k}$-волна при $n \to \infty$ ведет себя строго адиабатично. Поэтому энергия новых волн, рожденных гравитационным полем ($|\beta|^2, |\alpha|^2 - |\alpha_{-\infty}|^2$), остается нетронутой, не подвергается вычитанию при такой процедуре ренормализации. Этот метод подобен методу Паули — Вилларса, с той разницей, что не вводятся большие массы, а значит, сохраняется конформная инвариантность теории. Паркер, Фуллинг (1974), Фуллинг, Паркер (1974) нашли другое обоснование предлагаемого способа перенормировки.

§ 7. Сверхпространство и минисверхпространство

Квантование эволюции Вселенной как целого — такова конечная цель теории сверхпространства, развиваемой, начиная с 1960 г., Уилером [обзор см. Мизнер, Торн, Уилер (1973)] и его последователями.

Для решения этой задачи Уилер использует формулировку квантовой теории, предложенную Фейнманом в 1948 г.,— формулировку, в которой связь с классической теорией проявляется наиболее ярко.

Классическую теорию (механику, электродинамику и даже общую теорию относительности) можно формулировать в виде «принципа наименьшего действия».

При заданных начальном и конечном состояниях рассматриваемой системы осуществляется то движение, для которого интеграл $\int \mathscr{L}\, dt$ экстремален. Квантовая теория является вероятностной. В ней осуществляются и такие процессы (например, прохождение под барьером), которые невозможны в классической теории.

Фейнман предлагает рассматривать абсолютно все траектории, ведущие из начального состояния в конечное. В понятие «все» попадают, например, в задаче о свободной частице, на которую не действуют никакие силы, движения по зигзагу, с переменной скоростью и т. д. Для каждой траектории вычисляется интеграл $\int \mathscr{L}\, dt$. Вероятность попадания из данного начального состояния в данное конечное дается квадратом величины $|G(x_1, x_2)|$, а сама G есть сумма

$$G(x_1, x_2) = \sum \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \mathscr{L}\, dt\right), \qquad (23.7.1)$$