

ПРИЛОЖЕНИЕ К РАЗДЕЛУ I

ПОЛУЗАМКНУТЫЕ МИРЫ И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТРИКИ КРУСКАЛА

Замкнутый мир (с $k=1$) обладает рядом замечательных свойств. Например, полная энергия (масса) его тождественно равна нулю, полный электрический заряд также равен нулю [см. Ландау и Лифшиц (1973)]. Полезно

рассмотреть случай, когда однородное распределение вещества на некотором расстоянии от начала координат обрывается и дальше идет вакуум, т. е. рассмотреть изолированное тело. Это рассмотрение поможет понять свойства замкнутого мира. Для понимания этого приложения от читателя требуется знакомство с теорией сферического поля тяготения, метрикой Шварцшильда и координатами Крускала в этой метрике (см. ТТ и ЭЭ).

Для замкнутого мира есть момент наибольшего расширения, когда скорость деформации на мгновение равна нулю и вещество мгновенно покоится. Будем рассматривать этот момент t_m и для простоты ограничимся случаем пылевидного вещества без давления, $P=0$. Напомним (см. § I гл. I), что эволюция шара произвольного радиуса R_0 и все его свойства никак не зависят от наличия или отсутствия окружающего вещества, которое не влияет гравитационно на вещество внутри шара.

Рассмотрим шар, представляющий часть замкнутого мира, и будем считать, что все внешнее вещество (вне радиуса R_0) отсутствует, т. е. это шар в пустом пространстве. Вдали от шара поле слабое, и на бесконечности пространство евклидово. Вблизи шара искривление пространства зависит от силы гравитационного поля. При фиксированной плотности ρ сила поля зависит от размера шара. Пока радиус R_0 шара мал кривизна пространства в нем не проявляется, так как $a = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}} \gg R_0$ (рис. 25).

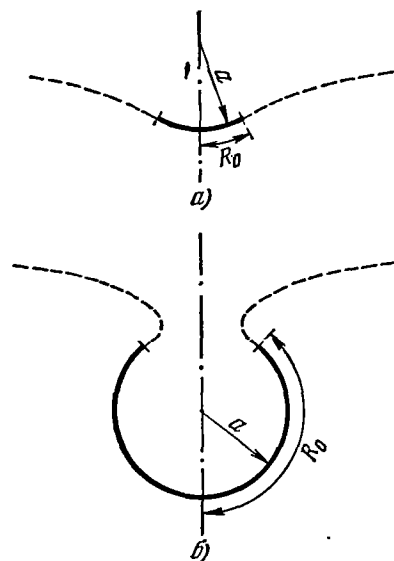


Рис. 25. Вращение кривых вокруг вертикальной линии дает изображение двумерного аналога искривленного пространства для изолированного тела. Эти же поверхности являются пространственными поверхностями $\theta=\pi/2$ в искривленном пространстве: а) радиус шара R_0 много меньше радиуса кривизны пространства a , создаваемого веществом шара плотности ρ ; б) полузамкнутый мир, $R_0 > \pi a/2$.

Но если увеличивать радиус шара при фиксированной плотности, т. е. добавлять новые слои вещества, то влияние кривизны на геометрическую структуру

пространства внутри шара растет. Как мы видели в § 2 гл. 2, поверхность шара $s = 4\pi a^2 \sin^2 r_0$, где r_0 — радиальная координата поверхности шара, а объем

$$V = 4\pi a^3 \left[\frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{4} \sin 2r_0 \right];$$

радиус шара $R_0 = ar_0$. Мы видим, что с ростом r_0 отличие от формул евклидовой геометрии становится все больше.

Наконец, после увеличения радиуса до значений, больших $R_0 = \pi l/2$, в геометрии внутренней шара появится характерная особенность, свойственная замкнутому миру: уменьшение площади сфер с их удалением от центра (т. е. с ростом r_0), если они лежат за максимальной «экваториальной сферой» $R_0 = \pi l/2$. Каковы свойства пространства вне такого шара, получившего название «полузамкнутого мира» [Клейн (1961), Зельдович (1962а), Новиков (1962, 1963, 1964а), Гаррисон, Торн, Вакано, Уилер (1965)]? Что представляет собой полузамкнутый мир для внешнего наблюдателя?

Внешнее гравитационное поле шара должно быть сферически-симметричным. Известно (см., например, ТТ и ЭЗ), что единственное сферическое поле тяготения описывается метрикой Шварцшильда и зависит только от одной константы — внешней гравитационной массы m (т. е. от полной энергии шара). Полная структура поля Шварцшильда описывается метрикой Крускала (см. § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ). Формулы для этой метрики приведены в конце данного приложения. Сейчас мы рассмотрим вопрос качественно.

Будем рассматривать шар в фиксированный момент наибольшего расширения t_m и будем менять только радиус шара r_0 в этот момент, добавляя новые слои при фиксированной плотности, и, следовательно, будем менять массу шара. Чем больше масса, тем больше гравитационный радиус тела \tilde{r}_g . В конце приложения показано, что $\tilde{r}_g = a_{\max} \sin^3 r_0$, в то время как шварцшильдовский радиус \tilde{r}_{\max} поверхности шара в момент максимального расширения (определенный как $\sqrt{s_{\max}/4\pi}$) есть, очевидно, $\tilde{r}_{\max} = a_{\max} \sin r_0$. Следовательно, отношение $\tilde{r}_g/\tilde{r}_{\max} = \sin^2 r$ при малых r_0 увеличивается по мере того, как в начальном условии задается шар все большего размера. Пока $r_0 < \pi/2$, $\tilde{r}_{\max} > \tilde{r}_g$ и полузамкнутости мира еще нет. Это еще «обычный» шар, качественно подобный шару в евклидовой геометрии. Теперь вспомним, что шар нестатичен. Его эволюция во времени определяется зависимостью a от t . Шар является частью модели Фрийдмана, и функция $a = a(t)$ нам известна (см. рис. 1). Шар расширяется от точки, достигает максимума размеров при t_m и снова сжимается в точку. Но как протекает эволюция такого шара для внешнего наблюдателя? Пространство-время для всей эволюции такого шара показано на рис. 26. По вертикали — собственное время частиц, по горизонтали — лагранжева координата r , в пустоте система непрерывно продолжена свободными пробными частицами (подробнее см. § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ). Заштрихована область, занятая материей. Линии $\tilde{r} = r_g$ — мировые линии гравитационного радиуса. Обычное пространство-время вдали от шара (евклидова бесконечность) находится справа, в области R_1 . Эволюция шара протекает для внешнего наблюдателя следующим образом. Шар расширяется от бесконечной плотности и $R_0 = 0$, $\tilde{r} = 0$ (точка a), выходит из-под своего гравита-

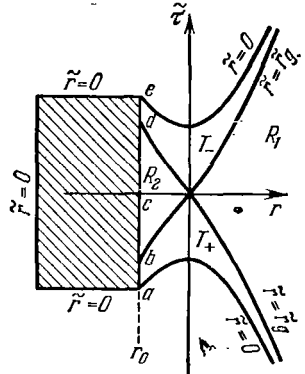


Рис. 26. Пространство-время полузамкнутого мира. Заштрихована область вещества шара.

ционного радиуса (в точке b), достигает максимальных размеров $\tilde{r}_{\max} = a_{\max} \sin r_0$ (в точке c), снова сжимается и за конечное собственное время достигает гравитационного радиуса (в точке d), а затем и $R_0 = 0$ (в точке e). Для внешнего наблюдателя подход к точке d растягивается на бесконечное время.

Если выбрать размеры шара так, что $r_0 = \pi/2$, то его энергии хватает как раз настолько, чтобы расширяться до $\tilde{r}_{\max} = \tilde{r}_g$ и снова сжаться (см. рис. 26). Наконец, при $r_0 > \pi/2$ мы имеем полузамкнутый мир. Поверхность шара (полузамкнутого мира) уже никогда не выходит из-под сферы Шварцшильда к внешнему наблюдателю, т. е. не выходит в область R_1 . Однако поверхность шара выходит из T_+ -области, из-под сферы Шварцшильда, но не к внешнему наблюдателю в правую R_1 -область, а в левую R_2 -область, достигает наибольшего размера \tilde{r}_{\max} и вновь сжимается. Вне полузамкнутого мира, в вакууме метрика является метрикой Крускала (см. § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ) с «горловиной» в пространстве (т. е. местом минимума площади поверхности сфер в фиксированный момент) (см. рис. 26). Размер «горловины» меняется с течением времени, она расширяется от точки, достигает максимума и вновь сужается к точке.

Из полузамкнутого мира внешний наблюдатель может получить информацию только о ранних стадиях расширения, когда поверхность шара находится еще в T_+ -области (см. рис. 26).

Имеют ли полузамкнутые миры какое-либо отношение к реальности? Мы не знаем пока таких объектов [см. анализ в § 5 гл. 14 ТТ и ЭЗ; в последнее время этот вопрос рассматривал Марков (1973)]. Но, независимо от реальности их существования, рассмотрение свойств полузамкнутых миров имеет большой методический интерес. Особенно интересны внешние гравитационные проявления полузамкнутого мира.

Снова будем в момент максимального расширения t_m рассматривать все бóльшие по размерам шары одной и той же плотности. Какова масса таких шаров? Гравитационная масса m статической (хотя бы только на момент) конфигурации меньше суммы масс M составляющих ее частиц из-за гравитационного дефекта масс, и эта масса m может быть измерена далеким наблюдателем по ее полному тяготению.

Гравитационную массу m можно выразить следующим образом. Используем определение гравитационного радиуса $\tilde{r}_g = \frac{2Gm}{c^2}$, приведенное выше соотношение $\tilde{r}_g = a_{\max} \sin^3 r_0$ и следующее из (2.1.9) соотношение для плотности в момент максимального расширения: $\rho = \frac{3c^2}{8\pi G a_{\max}^2}$. В итоге получим

$$m = \frac{c^2 \tilde{r}_g}{2G} = \frac{c^2 a_{\max} \sin^3 r_0}{2G} = \frac{4}{3} \pi \rho (t_m) a_{\max}^3 \sin^3 r_0. \quad (I.П.1)$$

Между тем, по определению, сумма масс покоя M дается формулой (на моменты t_m)

$$M = \rho (t_m) V_{\max} = 4\pi a_{\max}^3 \rho (t_m) \left(\frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{4} \sin 2r_0 \right). \quad (I.П.2)$$

При малых размерах шара ($r_0 \ll 1$) обе массы, естественно, совпадают, так как гравитационный дефект мал:

$$M = m = \frac{4}{3} \pi a_{\max}^3 r_0^3 \rho (t_m).$$

С ростом r_0 сумма M масс составляющих частиц растет, как объем V , а гравитационная масса m растет медленнее из-за дефекта масс. Величина m

достигает максимума при $r_0 = \pi/2$:

$$m_{\max} = \frac{4}{3} \pi a_{\max}^3 \rho(t_m) = \frac{2}{3\pi} M.$$

С дальнейшим ростом r_0 масса m уменьшается. Добавление нового слоя вещества дает добавочный гравитационный дефект больший, чем собственная масса этого слоя. При $r \rightarrow \pi$ $m \rightarrow 0$. Таким образом, при стремлении конфигурации к замкнутой масса стремится к нулю. Кратко можно сказать, что масса замкнутого мира равна нулю*). В таком мире гравитационный дефект равен самой собственной массе:

$$M = \rho V_{\text{полн}} = 2\pi^2 a_{\max}^3 \rho(t_m).$$

В замкнутом мире равен нулю и полный электрический заряд. Отличный от нуля полный заряд был бы возможен лишь в том случае, если бы были неверны уравнения Максвелла. Заряд является источником электрического поля. В евклидовом пространстве силовые линии электрического поля, выходя из заряда, либо стекают к заряду противоположного знака, либо уходят на бесконечность. В замкнутом мире бесконечности нет.

Зададимся произвольным распределением электрического поля \mathcal{E} в замкнутом мире и найдем соответствующую плотность заряда ρ_e по уравнению $\text{div } \mathcal{E} = 4\pi\rho_e$. Всегда окажется, что полный заряд равен нулю,* т. е. $Z = \int \rho_e dV = 0$, так как если нет бесконечности, то силовые линии, начинающиеся на одном заряде, обязательно кончатся на другом заряде противоположного знака, нейтрализуящем первый. Подробнее эти вопросы и анализ других свойств замкнутых и полузамкнутых миров см. Марков (1973).

В заключение приведем формулы для полузамкнутого мира [см. Новиков (1964a)], причем воспользуемся решением Толмена (см. § 13 гл. 3 ТТ и ЭЗ). Интервал запишем в виде

$$ds^2 = \tilde{a}^2 [d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, r)} (dr)^2 - \tilde{r}^2(\tau, r) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (I.П.3)$$

где \tilde{a} — постоянная размерности длины, являющаяся масштабом, скорость света равна единице и все величины в скобках безразмерны. Решение Толмена имеет вид

$$e^{\lambda} = \frac{(\tilde{r}')^2}{1+f(r)}, \quad \tau + \Phi(r) = \frac{1}{\tilde{f}(r)} \sqrt{f(r)\tilde{r}^2 + F(r)\tilde{r}} + \\ + \frac{F(r)}{[-f(r)]^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{-f(r)\tilde{r}}{F(r)}}, \quad \tilde{a}^2 \frac{8\pi G}{c^2} \rho = \frac{F'(r)}{\tilde{r}'\tilde{r}^2}, \quad (I.П.4)$$

где $f(r)$, $F(r)$ и $\Phi(r)$ — произвольные функции, определяемые условием задачи, штрих — производная по r . Пусть область, заполненная веществом (при $r < r_0$), является частью однородной замкнутой модели. Тогда, переходя от выражения интервала (2.1.10) к (I.П.3), получим

$$\left. \begin{aligned} f(r) = -\sin^2 r, \quad F(r) = \sin^3 r, \quad \Phi = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq r_0, \\ \tilde{a} = a(t)_{\max} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho(t_m)}}. \end{aligned} \right\} \quad (I.П.5)$$

*) Иной подход к определению массы замкнутого мира с тем же результатом $m=0$ см. Ландау и Лифшиц (1973, стр. 457).

Если $\frac{\pi}{2} < r_0 < \pi$, то вещество представляет собой полузакнутый мир. Вне шара при $r > r_0$ — вакуум. Для того чтобы сшить решение (I.П.5) с метрикой Крускала (см. § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ) для вакуума, надо при $r > r_0$ положить

$$f = -[(r + C_1)^2 + C_2]^{-1} \sin^6 r_0,$$

$$F = \sin^3 r_0, \quad \Phi = \frac{\pi}{2} \left[\frac{(r + C_1)^2 + C_2}{\sin^4 r_0} \right]^{1/2},$$

где $C_2 = \sin^6 r_0$, а C_1 очевидным образом выражается через r_0 из условия непрерывности функций при $r = r_0$.

В § 14 гл. 3 ТТ и ЭЗ показано, что $F\tilde{a} = \tilde{r}_{g_+}$. Поэтому, используя выражение для \tilde{a} из (I.П.5), получаем окончательно $r_g = a_{\max} \sin^3 r_0$, где r_0 — граница шара. Последнее выражение и приведено выше в тексте.