Из рис. 1.2 видно, что

$$\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1+\Delta\mathbf{r},$$

или

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \tag{1.4}$$

т. е. вектор перемещения равен геометрической разности радиусов-векторов конечного и начального положения точки; этот вектор *представляет собой приращение радиуса-вектора* и характеризует изменение положения точки M в пространстве за время Δt.

§ 2. Скорость и ускорение произвольно движущейся точки

Траектория и перемещение являются лишь чисто геометрическими характеристиками движения. Два различных движения, для которых одно и то же перемещение $\Delta\mathbf{r}$ совершилось за разные промежутки времени, геометрически одинаковы, но кинематически совершенно различны. Это различие характеризуется различной быстротой изменения положения точки, определяемой отношением

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\mathbf{v}_{ср}. \tag{2.1}$$

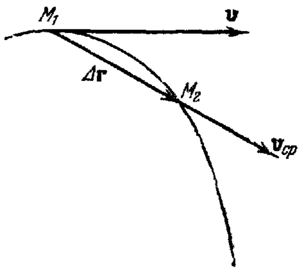

Рис. 1.3.

Вектор $\mathbf{v}_{ср}$ называется **средней скоростью** движения точки за время Δt. Его численное значение $|\mathbf{v}_{ср}|=\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}$ есть скорость такого равномерного и прямолинейного движения, при котором точка M перешла бы из положения M_1 в положение M_2 за тот же промежуток времени Δt, за который произошло ее истинное криволинейное движение по дуге $\smile{M_1M_2}$ (рис. 1.3). Вектор $\mathbf{v}_{ср}$, как и вектор $\Delta\mathbf{r}$, направлен по секущей M_1M_2.

Переходя к пределу для бесконечно малого промежутка времени ($\Delta t\to 0$), мы получим вектор **истинной**, или **мгновенной скорости** в точке M_1:

$$\mathbf{v}=\lim_{M_2\to M_1}\mathbf{v}_{ср}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{2.2}$$

Поскольку секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости $\mathbf{v}$ направлен по касательной к траектории. Тогда согласно (1.3)

$$|\mathbf{v}|=v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}, \tag{2.3}$$

т. е. величина скорости v численно равна пределу отношения длины пути к промежутку времени, как в случае прямолинейного движения. В абсолютной системе единиц СГС скорость измеряется в см/с. В технической и международной системе единиц СИ скорость v измеряется в м/с.

При прямолинейном движении быстрота изменения величины скорости v характеризуется ускорением w, т. е. изменением величины скорости за единицу времени.

В общем случае произвольного криволинейного движения вектор скорости $\mathbf{v}$ может меняться и по величине и по направлению. Быстрота изменения вектора скорости тогда будет характеризоваться некоторым вектором ускорения $\mathbf{w}$. Для дальнейшего будет целесообразно расчленить вектор $\mathbf{w}$ на две составляющие, характеризующие в отдельности быстроту изменения скорости по величине и быстроту изменения ее по направлению.

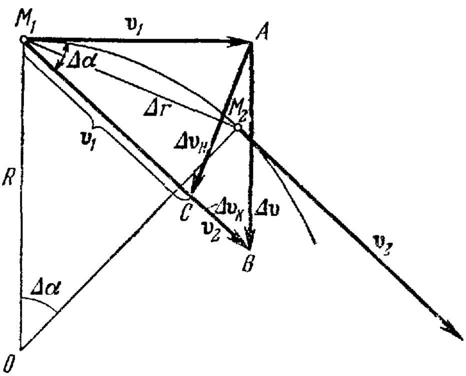

Рис. 1.4.

На рис. 1.4 изображен отрезок траектории между двумя соседними бесконечно близкими точками M_1 и M_2. Скорости в этих точках $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ направлены по касательным к траектории и отличаются друг от друга по величине и по направлению. Перенесем вектор $\mathbf{v}_2$ параллельно самому себе в точку M_1, как это показано на рис. 1.4. Соединим теперь конец вектора $\mathbf{v}_1$ с концом перенесенного вектора $\mathbf{v}_2$ вектором $\Delta\mathbf{v}$. Из чертежа видно, что

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \tag{2.4}$$

т. е. вектор $\Delta\mathbf{v}$ есть геометрическое приращение вектора $\mathbf{v}$ за время Δt. Отношение

$$\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{w}_{\text{ср}} \tag{2.5}$$

является вектором среднего ускорения за время Δt, а предел этого отношения будет вектором истинного, или мгновенного ускорения

$$\mathbf{w} = \lim_{M_2 \to M_1} \mathbf{w}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{2.6}$$

при произвольном движении точки M.

На отрезке M_1B, изображающем перенесенный в точку M_1 вектор $\mathbf{v}_2$, отложим отрезок M_1C, численно равный длине вектора $\mathbf{v}_1$, и соединим прямой точку A (конец вектора $\mathbf{v}_1$) с точкой C. Из рис. 1.4 видно, что вектор $\Delta\mathbf{v}$ может быть представлен как геометрическая сумма двух векторов:

$$\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_к + \Delta\mathbf{v}_н. \tag{2.7}$$

Вектор $\Delta\mathbf{v}_к$ *численно характеризует изменение величины скорости за время* Δt:

$$|\Delta\mathbf{v}_к| = v_2 - v_1 = \Delta v. \tag{2.8}$$

Если величина скорости v во время движения не меняется, то $\Delta v = 0$ и $\Delta\mathbf{v}_к = 0$.

Вектор $\Delta\mathbf{v}_н$ *характеризует изменение направления вектора скорости за время* Δt. Из чертежа видно, что он направлен в сторону вогнутости кривой. Если с течением времени направление движения не меняется, то векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ направлены вдоль одной и той же прямой и $\Delta\mathbf{v}_н = 0$. Подставляя (2.7) в (2.6), получаем:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}_к}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}_н}{\Delta t} = \mathbf{w}_к + \mathbf{w}_н. \tag{2.9}$$

При $\Delta t \to 0$ угол $\Delta\alpha$ при вершине равнобедренного треугольника M_1AC стремится к нулю и направления векторов $\mathbf{v}_2$ и $\Delta\mathbf{v}_к$ стремятся к направлению вектора $\mathbf{v}_1$. Поэтому вектор

$$\mathbf{w}_к = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}_к}{\Delta t} \tag{2.10}$$

также направлен вдоль вектора $\mathbf{v}_1$, т. е. по касательной к траектории. Численное значение этого вектора согласно (2.8) равно

$$w_к = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \tag{2.11}$$

т. е. характеризует быстроту изменения величины скорости при движении. Этот вектор называется касательным, или тангенциальным ускорением.

Для определения величины и направления второго вектора $\mathbf{w}_н$ будем считать промежуток времени Δt бесконечно малым. Тогда точки дуги траектории M_1M_2 и векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ будут лежать практически в одной плоскости (называемой соприкасающейся плоскостью к кривой). Для упрощения дальнейшего вывода ограничимся здесь случаем плоского движения, при котором все точки траектории лежат в одной плоскости. Восставим в точках M_1 и M_2 перпендикуляры к касательным — нормали к кривой — до их пересечения в точке O. Малая дуга $\Delta s = \overset{\frown}{M_1M_2}$ будет тогда практически отрезком окружности с центром в точке O и радиусом

$$R \approx OM_1 \approx OM_2. \tag{2.12}$$

Угол между линиями OM_1 и OM_2 также равен $\Delta\alpha$ (углы со взаимно-перпендикулярными сторонами). Величина R связана с $\Delta\alpha$ очевидным соотношением

$$R \approx \frac{\Delta s}{\Delta\alpha}. \tag{2.13}$$

В случае произвольной пространственной кривой величина R и положение точки O определяются из предельного соотношения

$$R = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha}; \tag{2.14}$$

R носит название **радиуса кривизны** траектории. Величина, обратная радиусу кривизны,

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \tag{2.15}$$

называется соответственно **кривизной** траектории в данной точке. Для окружности R и K постоянны во всех точках. В случае прямой линии угол $\Delta\alpha$ между направлениями траектории в соседних точках тождественно равен нулю и, следовательно, кривизна K также равна нулю.

Проводя на рис. 1.4 отрезок перемещения $\Delta\mathbf{r}$, соединяющий точки M_1 и M_2, мы получим два равнобедренных треугольника OM_1M_2 и M_1AC, подобных друг другу. Из пропорциональности сходственных сторон можно получить, что

$$|\Delta\mathbf{v}_н| = \frac{v_1}{R}|\Delta\mathbf{r}|. \tag{2.16}$$

Отсюда можно вычислить величину искомого вектора

$$w_н = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\mathbf{v}_н|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R} \cdot \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v^2}{R}, \tag{2.17}$$

где в окончательном выражении мы опустим индекс 1 ввиду произвольности выбора начальной точки.

В пределе угол $\Delta\alpha$ при вершине равнобедренного треугольника M_1AC стремится к нулю, а углы при основаниях стремятся к 90°.

Следовательно, $\Delta\mathbf{v}_н$ в пределе перпендикулярен к $\mathbf{v}_1$ и вектор $\mathbf{w}_н$ перпендикулярен к вектору скорости и направлен по нормали к центру кривизны O кривой. Поэтому вектор $\mathbf{w}_н$ носит название **нормального ускорения**. Согласно (2.17) величина нормального ускорения численно равна отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории в данной точке. Можно доказать, что эти соотношения для $\mathbf{w}_н$ остаются справедливыми и в общем случае произвольной пространственной кривой.

Касательное и нормальное ускорения (рис. 1.5) взаимно-перпендикулярны, и их геометрическая сумма равна

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_к + \mathbf{w}_н, \tag{2.18}$$

т. е. вектор полного ускорения равен по модулю

$$w = \sqrt{w_к^2 + w_н^2}. \tag{2.19}$$

В системе СГС ускорение измеряется в *см/с*^{2}, а в системе СИ — в м/с^2.

В случае равномерного криволинейного движения величина скорости постоянна: $v = \mathrm{const}$, касательное ускорение равно нулю и полное ускорение равно нормальному:

$$\mathbf{w}_к = 0 \text{ и } \mathbf{w} = \mathbf{w}_н. \tag{2.20}$$

Для изображенного на рис. 1.6 примера равномерного вращения материальной точки по окружности постоянного радиуса R величина нормального ускорения $w_н = v^2/R$ остается постоянной, а вектор $\mathbf{w}_н$ направлен все время к центру окружности. Поэтому $\mathbf{w}_н$ называют также центростремительным ускорением.

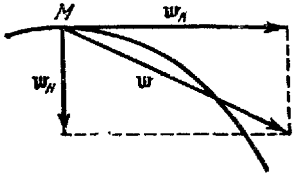

Рис. 1.5.

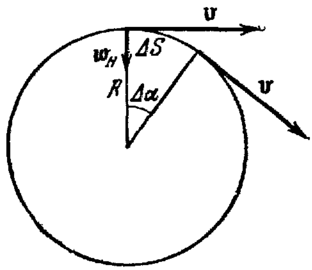

Рис. 1.6.

В случае неравномерного, но прямолинейного движения кривизна траектории $K = 1/R$ равна нулю, $R = \infty$, нормальное ускорение $\left(w_н = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{\infty} = 0\right)$ отсутствует и полное ускорение равно касательному:

$$\mathbf{w}_н = 0 \text{ и } \mathbf{w} = \mathbf{w}_к. \tag{2.21}$$

Направление этого вектора остается постоянным — все время вдоль прямой, по которой движется точка (рис. 1.7). Если при этом остается постоянной и величина w, то движение называется равноускоренным. Из школьного курса физики известно, что в этом случае зависимость пути от времени выражается формулой

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{wt^2}{2}, \tag{2.22}$$

а скорость растет линейно со временем:

$$v = v_0 + wt. \tag{2.23}$$

В случае равномерного и прямолинейного движения скорость неизменна и по величине и по направлению: $\mathbf{v} = \mathrm{const}$, а обе составляющие ускорения и само ускорение отсутствуют:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{н}} = \mathbf{w}_{\text{к}} = 0. \qquad (2.24)$$

В общем случае неравномерного криволинейного движения вектор ускорения $\mathbf{w}$ и обе его составляющие $\mathbf{w}_{\text{к}}$ и $\mathbf{w}_{\text{н}}$ отличны от нуля.

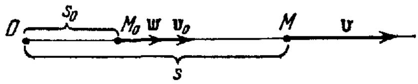

Рис. 1.7.

В заключение рассмотрим движение тела, брошенного под углом α к горизонту с некоторой начальной скоростью v_0 (рис. 1.8). Ускорение земного притяжения постоянно по величине и по направлению (оно направлено вертикально вниз). Поэтому полное ускорение тела во время движения остается постоянным:

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} = \mathrm{const}. \qquad (2.25)$$

Однако, как видно из чертежа, расчленение $\mathbf{w}$ на нормальное и касательное ускорение в каждой точке траектории различно. Так,

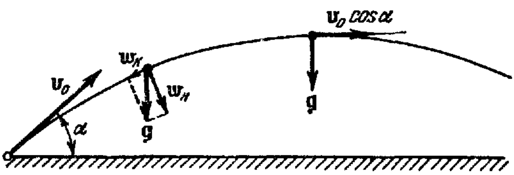

Рис. 1.8.

например, в верхней точке траектория горизонтальна и перпендикулярна к вектору $\mathbf{w}$. Следовательно, в этой точке существует только нормальное ускорение $w_{\text{н}} = g$ и

$$g = \frac{(v_0 \cos\alpha)^2}{R}. \qquad (2.26)$$

Из этого соотношения можно определить радиус кривизны в вершине траектории.