телам и поэтому никогда не уравновешивают друг друга. Если запомнить это последнее обстоятельство, вытекающее из точной формулировки третьего закона динамики, то никогда не возникнет вопроса о том, почему, например, лошадь движет телегу вперед, хотя их взаимные действия друг на друга и равны.

Когда человек идет по земле, то сила, с которой он отталкивает землю назад, равна по величине и направлена обратно той силе, с которой земля отталкивает человека вперед. При равенстве этих сил, однако, согласно второму закону динамики, возникающие ускорения обратно пропорциональны массам, и землю благодаря ее очень большой сравнительно с человеком массе можно считать практически неподвижной.

Подчеркнем наконец, что явления природы протекают одинаково (следовательно, законы природы имеют один и тот же вид) во всех инерциальных системах отсчета. Для классической механики это было установлено Галилеем — «принцип относительности Галилея». Подробнее об этом будет рассказано в томе III нашего курса.

§ 4. Закон сохранения и изменения количества движения (импульса). Реактивное движение

Второй закон Ньютона (3.7) позволяет найти ускорение движущейся точки в каждый данный момент времени. На практике чаще всего необходимо найти изменение движения тела за какой-нибудь определенный промежуток времени. Для решения этой задачи следовало бы применять второй закон динамики бесчисленное число раз, во все промежуточные моменты времени. Поэтому целесообразно предварительно преобразовать основные законы динамики и вывести из них ряд следствий, позволяющих находить конечные скорости тел сразу, без вычисления ускорений и скоростей во всех промежуточных точках. Первым таким практически важным следствием из основных законов динамики является так называемый з а к о н к о л и ч е с т в а д в и ж е н и я (часто вместо термина «количество движения» ныне применяется термин «импульс»). Используя (2.6), перепишем второй закон Ньютона (3.7) в виде

$$\mathbf{F} = m \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{4.1}$$

Рассмотрим конечный, но малый промежуток времени Δt, в течение которого действующая на материальную точку сила $\mathbf{F}$ не успевает заметно измениться ни по величине, ни по направлению. Заменяя тогда в (4.1) величины $\mathbf{F}$ и $\mathbf{w}$ их средними значениями за промежуток времени Δt, получим:

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Для постоянной силы ($\mathbf{F} = \text{const}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{F}/m = \text{const}$) средние значения $\mathbf{F}_{cp}$ и $\mathbf{w}_{cp} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ в точности равны их мгновенным значениям $\mathbf{F}$ и $\mathbf{w}$ в каждом промежутке Δt. В случае переменной силы это равенство будет выполняться тем точнее, чем меньше интервал Δt.

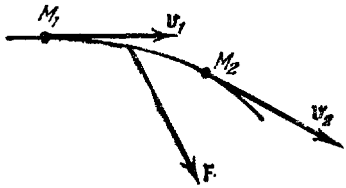

Рис. 1.12.

Обозначим скорость материальной точки в начале промежутка Δt через $\mathbf{v}_1$, а в конце него — через $\mathbf{v}_2$ (рис. 1.12). Тогда $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, и из (4.2) имеем:

$$\mathbf{F}_{cp} \Delta t = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1. \qquad (4.3)$$

Вектор $\mathbf{F}_{cp} \Delta t$, совпадающий по направлению с силой $\mathbf{F}_{cp}$ и численно равный произведению вектора силы $\mathbf{F}_{cp}$ на промежуток времени Δt, в течение которого она действовала, называется **элементарным импульсом силы**.

Вектор $m\mathbf{v}$, равный произведению массы m материальной точки на вектор скорости ее движения $\mathbf{v}$, называется **вектором количества движения** точки. Стоящая в правой части равенства (4.3) разность $m\mathbf{v}_2 — m\mathbf{v}_1$ представляет собой приращение вектора количества движения за время Δt. Обозначая это приращение через $\Delta(m\mathbf{v})$, получим математическую формулировку закона изменения количества движения:

$$\mathbf{F}_{cp} \Delta t = \Delta(m\mathbf{v}). \qquad (4.4)$$

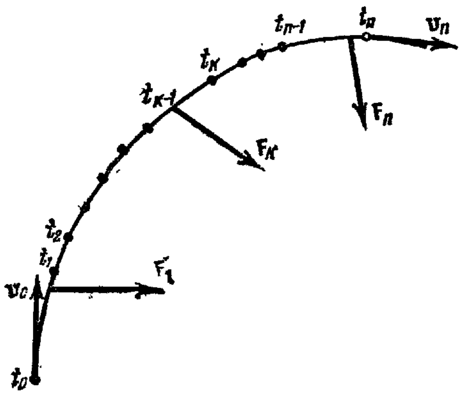

Рис. 1.13.

Элементарный импульс силы, действовавший на материальную точку в течение промежутка времени Δt, равен изменению ее количества движения за тот же промежуток времени.

В случае переменной силы, действующей в течение достаточно большого промежутка времени, последний следует разбить на достаточно малые элементарные интервалы Δt_k так, чтобы на каждом интервале можно было заменить силу ее средним значением в этом интервале $\mathbf{F}_k$. Перенумеровав все последовательные положения движущейся точки на ее траектории так, как это показано на рис. 1.13, применим равенство (4.4) последовательно к каждому интервалу.

Для первого интервала $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ получим:

$$\mathbf{F}_1 \Delta t_1 = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0.$$

Аналогично, для второго интервала $\Delta t_2 = t_2 - t_1$

$$\mathbf{F}_2 \Delta t_2 = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

и для всех последующих

$$\mathbf{F}_3 \Delta t_3 = m\mathbf{v}_3 - m\mathbf{v}_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{F}_k \Delta t_k = m\mathbf{v}_k - m\mathbf{v}_{k-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{F}_n \Delta t_n = m\mathbf{v}_n - m\mathbf{v}_{n-1}.$$

Сложим все эти равенства. Тогда промежуточные значения вектора количества движения попарно сократятся, и мы получим:

$$\mathbf{F}_1 \Delta t_1 + \mathbf{F}_2 \Delta t_2 + \dots + \mathbf{F}_k \Delta t_k + \dots + \mathbf{F}_n \Delta t_n = m\mathbf{v}_n - m\mathbf{v}_0. \quad (4.5)$$

Геометрическая сумма

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathbf{F}_k \Delta t_k$$

элементарных импульсов силы $\mathbf{F}_k \Delta t_k$ называется **полным импульсом** переменной силы за время $t_n - t_0$. При введенных обозначениях

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathbf{F}_k \Delta t_k = m\mathbf{v}_n - m\mathbf{v}_0, \quad (4.6)$$

т. е. *полный импульс переменной силы равен полному изменению количества движения за все время действия силы.*

Закон изменения количества движения (4.6) позволяет по начальной скорости $\mathbf{v}_0$ и известному полному импульсу силы находить сразу конечную скорость $\mathbf{v}_n$ без вычисления всех промежуточных скоростей $\mathbf{v}_k$. Вычисление полного импульса

$$\sum_{k=1}^{k=n} \mathbf{F}_k \Delta t_k$$

в общем случае произвольных сил представляет собой довольно сложную задачу, решаемую методами интегрального исчисления. В простейшем случае постоянной силы

$$\sum_k \mathbf{F} \Delta t_k = \mathbf{F} \sum_k \Delta t_k = \mathbf{F}(t_n - t_0). \quad (4.7)$$

Если сила **F** имеет во все время движения одно и то же направление и меняется только по своей величине, то для вычисления полного импульса геометрическая сумма может быть заменена алгебраической $\sum_k F_k \Delta t_k$. В этом случае искомый импульс можно вычислить графически. Построим график изменения величины силы F в зависимости от времени t (рис. 1.14). Разобьем ось абсцисс на указанные выше малые интервалы. На интервале Δt_k проведем пунктиром горизонтальную прямую с ординатой, равной среднему значению величины силы F_k в этом интервале. Тогда площадь заштрихованной на рисунке полоски

$$F_k \Delta t_k \qquad (4.8)$$

численно равна элементарному импульсу силы, и полный импульс будет численно равен сумме площадей всех элементарных полосок. Уменьшая величины интервалов Δt_k и увеличивая их число n, в пределе (при $\Delta t_k \to 0$ и $n \to \infty$) получим, что искомый полный импульс силы

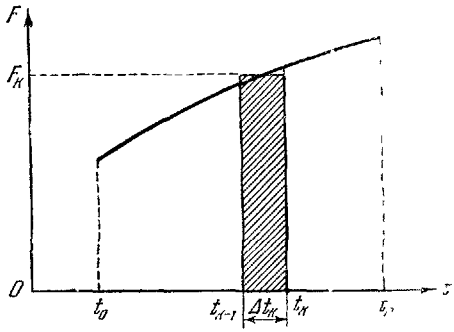

Рис. 1.14.

$$\sum F_k \Delta t_k \qquad (4.9)$$

численно равен площади, заключенной на нашем рисунке между кривой $F(t)$, осью абсцисс и двумя ординатами, восставленными в начальной и конечной точках интервала t_0 и t_n. Измеряя указанную площадь, мы получаем возможность графически вычислить величину полного импульса силы.

Если сила **F** меняется не только по величине, но и по направлению, то вектор импульса силы следует разложить на составляющие по трем координатным осям и произвести указанное графическое вычисление для каждой из трех составляющих вектора $\sum_k \mathbf{F}_k \Delta t_k$, а затем геометрически сложить эти три суммы.

Закон изменения количества движения является непосредственным следствием второго закона Ньютона. Используя наряду с ним и третий закон динамики (3.8), можно получить так называемый з а к о н с о х р а н е н и я к о л и ч е с т в а д в и ж е н и я.

Для этого рассмотрим две взаимодействующие материальные точки с массами m_1 и m_2. Обозначим скорости движения этих точек в данный момент времени соответственно через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ (рис. 1.15). Если первая из этих точек действует на вторую с силой $\mathbf{F}_{1,2}$, то вторая из них, согласно третьему закону динамики, действует на первую с силой $\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2}$. *Под действием этих сил за промежуток времени* Δt скорости точек получают приращения $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$ и их количества движения изменяются соответственно на величины $\Delta(m_1\mathbf{v}_1)$ и $\Delta(m_2\mathbf{v}_2)$. Применяя закон изменения количества движения (4.4) к движению каждой точки в отдельности, мы можем написать:

$$\mathbf{F}_{2,1}\Delta t = \Delta(m_1\mathbf{v}_1), \quad \mathbf{F}_{1,2}\Delta t = \Delta(m_2\mathbf{v}_2). \tag{4.10}$$

Складывая эти два равенства и учитывая, что $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$, получаем:

$$0 = \Delta(m_1\mathbf{v}_1) + \Delta(m_2\mathbf{v}_2) = \Delta(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2). \tag{4.11}$$

Рассматриваемые две материальные точки, взаимодействующие только друг с другом, образуют систему, изолированную от действия всех остальных тел.

Геометрическая сумма количества движения обеих точек $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ называется **количеством движения системы**. Из (4.10) и (4.11) следует, что за время движения количество движения каждой точки в отдельности может меняться, но количество движения системы остается постоянным:

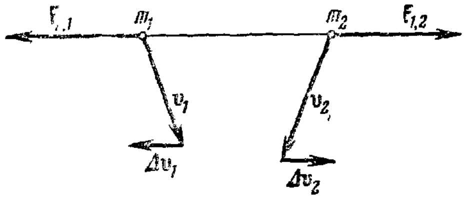

Рис. 1.15.

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \text{const}. \tag{4.12}$$

Аналогичным образом может быть выведен закон сохранения количества движения для системы, состоящей из любого числа материальных точек или тел, взаимодействующих только между собой. *В изолированной системе материальных тел количество движения всей системы в целом остается неизменным:*

$$\sum_i m_i\mathbf{v}_i = \text{const}, \tag{4.13}$$

где m_i — массы отдельных точек системы, а $\mathbf{v}_i$ — их скорости в любой момент времени.

Мы видим, что при механическом движении увеличение количества движения одного тела равно уменьшению количества движения всех остальных взаимодействовавших с ним тел. Взаимодействующие тела обмениваются количествами движения; количество движения переносится от одного тела к другому. Скорость передачи этой величины от одного взаимодействующего тела к другому определяет величину силы взаимодействия. Для каждого из тел в соответствии с (4.4) мы можем записать, что

$$\frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t} = \mathbf{F}. \tag{4.14}$$

Действие закона сохранения количества движения мы постоянно наблюдаем в повседневной жизни. Если лодка пристает носом к берегу, а пассажир находится на корме, то когда пассажир начнет идти по лодке со скоростью $\mathbf{v}_1$ к берегу, лодка получит скорость $\mathbf{v}_2$ в обратном направлении и отплывает от берега. Когда за счет действия пороховых газов в стволе орудия происходит выстрел, то количество движения вылетающего снаряда $m_1\mathbf{v}_1$ равно по величине и обратно по знаку количеству движения $m_2\mathbf{v}_2$ откатывающегося назад орудия.

Для уменьшения отката орудия необходимо увеличивать его массу m_2 по сравнению с массой снаряда m_1. В этом отношении значительным преимуществом обладают реактивные снаряды. В ракете или реактивном снаряде происходит постепенное сгорание порохового заряда и истечение горячих пороховых газов назад через соответствующие отверстия (д ю з ы). Рассматривая ракету и вытекающие из нее газы как единую механическую систему, мы можем применить к ней закон сохранения количества движения. Так как вытекающие газы обладают количеством движения, направленным назад, то основная часть ракеты получает движение вперед. Таким образом, всю отдачу при выстреле ракеты воспринимают вытекающие газы, и для запуска реактивного снаряда большого калибра вместо массивного ствола достаточно простой и легкой направляющей рамы.

Принцип реактивного движения ныне широко применяется для полетов. Мысль о возможности такого применения реактивного движения была впервые высказана в 1881 г. казненным царским правительством известным революционером Кибальчичем.

Дальнейшее развитие эта мысль получила в работах «пионера звездных дорог» К. Э. Циолковского.

Современные реактивные самолеты уже достигли сверхзвуковых скоростей полета. С помощью ракет запускаются искусственные спутники Земли и космические корабли, имеющие еще большие начальные скорости 8—11 км/с.

§ 5. Работа сил и кинетическая энергия

За бесконечно малый промежуток времени Δt материальная точка M пройдет элементарный путь Δs по траектории и переместится в пространстве на величину $\Delta\mathbf{r}$. На этом участке на точку может действовать сила $\mathbf{F}$, направленная под некоторым углом α к перемещению $\Delta\mathbf{r}$ (рис. 1.16).

Скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения называется элементарной р а б о т о й с и л ы $\mathbf{F}$ на бесконечно малом перемещении $\Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}\ ^{*}). \qquad (5.1)$$

*) Здесь и далее символ Δ перед буквой A означает не приращение работы (как для остальных величин), а указывает лишь на малость элементарной работы.