§ 7. Потенциальная энергия тяготения и упругих деформаций

Вычислим величину потенциальной энергии в простейших, но важных для дальнейшего случаях — для тяготения и для упругих деформаций.

Ньютон установил закон всемирного тяготения, изучая законы движения небесных тел. Согласно этому закону материальные точки с массами M и m, находящиеся на расстоянии r друг от друга, притягиваются с силой F, равной по величине

$$F=\varkappa\frac{Mm}{r^2}. \tag{7.1}$$

Здесь $\varkappa$ — гравитационная постоянная, или постоянная тяготения:

$$\varkappa=6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2). \tag{7.2}$$

Земля не является «материальной точкой» для тел, расположенных на ее поверхности. Но, как показывает теория, сила, с которой Земля притягивает тела, расположенные вне ее, численно в точности равна силе, которую создавала бы материальная точка с массой M, равной массе Земли, и расположенная в центре Земли. В соответствии с законом тяготения на материальную точку с массой m со стороны Земли будет действовать сила тяжести, равная

$$F_{\text{тяж}}=\varkappa\frac{Mm}{R^2}, \tag{7.3}$$

где R — расстояние от точки m до центра Земли. При малых перемещениях (порядка нескольких километров от поверхности Земли) изменениями R можно пренебречь, считая R постоянной величиной, равной радиусу Земли ($R_З = 6370$ км). Тогда (7.3) можно переписать так:

$$F_{\text{тяж}}=\frac{\varkappa M}{R^2}\cdot m=g\cdot m, \tag{7.4}$$

где g имеет смысл ускорения, с которым движутся под действием силы тяжести все материальные тела у поверхности Земли. Численное значение этого ускорения свободного падения равно примерно

$$g=\frac{\varkappa M}{R^2}=9{,}8\ \text{м/с}^2$$

(в силу несферичности Земли и ее вращения величина g несколько меняется с изменением географической широты, на чем мы здесь останавливаться не будем).

При перемещении массы m с одной высоты на другую сила тяжести совершает работу. Следовательно, меняется потенциальная энергия системы Земля — масса m. Обычно при этом говорят о потенциальной энергии тела m, однако следует помнить, что здесь, как и в любом другом случае, потенциальная энергия есть энергия взаимодействия Земли и материальной точки массы m.

Вычислим теперь ее значение для перемещений m лишь вблизи поверхности Земли, так что высота подъема ничтожна по сравнению с радиусом Земли. В этом случае силу тяготения $\mathbf{F}_{\text{тяж}}$, действующую на m со стороны Земли, можно считать постоянной (не зависящей от высоты) и направленной к центру Земли.

Направим ось OZ вертикально вверх. В такой системе отсчета сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{тяж}}$ будет иметь составляющую только по оси OZ, которую мы обозначим через F_z (рис. 1.18). Напомним еще раз, что эта сила постоянна, т. е. не зависит от z. По величине она равна

$$F_z = -mg. \tag{7.5}$$

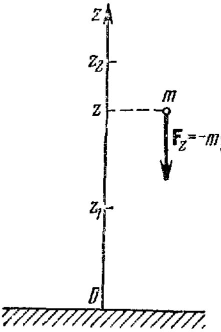

Рис. 1.18.

Поднимем точку m с высоты z_1 на высоту z_2. При этом сила тяжести совершит работу

$$A_{1,2} = F_z \cdot (z_2 - z_1) = -mg \cdot (z_2 - z_1) = = mgz_1 - mgz_2. \tag{7.6}$$

Обозначим потенциальную энергию точки m на высоте z_1 через U_1, а на высоте z_2 — через U_2. Тогда согласно (6.6)

$$A_{1,2} = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2. \tag{7.7}$$

Из (7.6) и (7.7) следует, что

$$U_1 - U_2 = mgz_1 - mgz_2. \tag{7.8}$$

Одно уравнение (7.8) не позволяет определить обе входящие в него неизвестные величины U_1 и U_2. Поэтому наряду с простейшим решением

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= mgz_1, \\ U_2 &= mgz_2 \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

это уравнение допускает еще бесчисленное множество решений

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= mgz_1 + C, \\ U_2 &= mgz_2 + C, \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

отличающихся от решения (7.9) значением произвольной постоянной C.

Так как z_1 и z_2 могут быть любыми, то потенциальная энергия поля тяжести $U(z)$ на заданной высоте z над уровнем земли согласно (7.10) выражается общей формулой:

$$U(z) = mgz + C. \tag{7.11}$$

Неопределенность численного значения потенциальной энергии связана, как уже отмечалось выше, с тем, что соотношение (6.6) определяет лишь разность потенциальных энергий в двух положениях, но не указывает, в каком из них она равна нулю. Тем самым выбор начала отсчета оказывается произвольным. Если мы условимся отсчитывать потенциальную энергию от уровня земли, т. е. положим, что при $z = 0$ и $U(0) = 0$, то произвольная постоянная C в уравнении (7.11) также обратится в нуль, а значения потенциальной энергии при $z < 0$, т. е. в яме, будут считаться отрицательными.

Вычислим теперь потенциальную энергию для другого силового закона — упругих деформаций. Рассмотрим тело массы m, подвешенное на пружине, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с m. Ось OX направим вертикально вниз, как на рис. 1.19. Под действием веса тела mg пружина растянется на некоторую величину, пока ее сила упругости не уравновесит вес груза. Отсчет перемещений x и упругих сил будем вести от этого положения равновесия и тем самым исключим из рассмотрения влияние уравновешенной силы тяжести. Сместим груз из положения равновесия на некоторое расстояние, как это показано пунктиром. При этом пружина растянется на величину x и в ней возникнет упругая сила $\mathbf{F}_{упр}$, стремящаяся возвратить груз в положение равновесия. При небольших деформациях, по закону Гука, проекция этой силы на ось OX равна

$$F_x = -kx, \tag{7.12}$$

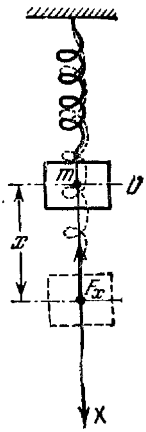

Рис. 1.19.

т. е. *упругая сила прямо пропорциональна смещению и направлена в обратную сторону* (знак минус). При $x > 0$ (растяжение) $F_x < 0$, а при $x < 0$ (сжатие) $F_x > 0$. Коэффициент пропорциональности k (дин/см, Н/м или кгс/мм) называется ж е с т к о с т ь ю п р у ж и н ы и показывает, какую силу надо приложить, чтобы растянуть (или сжать) пружину на единицу длины ($F = k$ при $x = -1$). Сообщим грузу дополнительное бесконечно малое смещение Δx. При этом сила упругости совершит работу $\Delta A = F_x \cdot \Delta x$ и потенциальная энергия груза изменится на величину $\Delta U = -\Delta A$. Тогда согласно (7.12)

$$\Delta U = -\Delta A = -F_x \cdot \Delta x = -(-kx) \cdot \Delta x = kx \cdot \Delta x. \tag{7.13}$$

Будем растягивать пружину из положения равновесия ($x = 0$) до какого-то конечного смещения x. Разбивая весь путь на бесконечно малые участки Δx и используя (7.13), найдем изменение потенциальной энергии

$$U(x) - U(0) = \sum_0^x kx \cdot \Delta x. \tag{7.14}$$

Мы уже видели в § 5, что произведение типа $x \cdot \Delta x$ можно представить как приращение величины $x^2/2$, и, следовательно, в нашем примере

$$\Delta U = \Delta\left(\frac{kx^2}{2}\right). \qquad (7.15)$$

Если бесконечно малые приращения двух величин U и $kx^2/2$ равны между собой, то такое равенство сохранится и для любых конечных приращений тех же величин. Будем растягивать пружину из положения равновесия ($x = 0$) до какого-то конечного смещения x. Тогда из (7.15) следует, что

$$U(x) - U(0) = \frac{kx^2}{2} - \frac{k \cdot 0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} = \frac{0 + kx}{2}(x - 0). \qquad (7.16)$$

Последнее преобразование показывает еще, что приращение потенциальной энергии может быть приравнено работе против сил упругости на всем перемещении $x - 0$, причем, поскольку сила F_x на этом пути непрерывно менялась, то при вычислении работы надо взять ее среднее арифметическое значение $|\bar{F}_x| = \frac{0+kx}{2}$.

Чтобы избавиться от неопределенной постоянной в выражении для потенциальной энергии, выберем начало отсчета в положении равновесия, т. е. положим $U(0) = 0$. Тогда окончательно

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \qquad (7.17)$$

Величина U есть энергия взаимного расположения частей пружины — потенциальная энергия деформированной пружины.

Выражение (7.17) симметрично относительно знака смещения. При растяжении или сжатии пружины потенциальная энергия деформации возрастает по одному и тому же закону.

Если мы выведем груз, связанный с пружиной, из положения равновесия, то он будет двигаться. В силу закона сохранения энергии при движении груза (при отсутствии трения) сумма кинетической и потенциальной энергий груза будет сохраняться:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \mathrm{const}. \qquad (7.18)$$

Когда груз проходит через положение равновесия ($x = 0$), его потенциальная энергия минимальна и равна нулю, а кинетическая — максимальна и равна полной энергии E. Через положения равновесия груз будет проходить с максимальной скоростью.

В моменты остановок груза ($v = 0$) и изменения направления движения груза на обратное его кинетическая энергия минимальна и равна нулю, а потенциальная — максимальна и равна полной энергии E. Следовательно, в моменты остановок груза его смещение x по абсолютной величине будет максимальным.

Вернемся теперь к первому примеру и рассмотрим более общий случай, когда расстояние между тяготеющими телами много больше их размеров. Оба тела тогда можно считать материальными точками, и гравитационная сила между ними определяется выражением (7.1). Считая более массивную точку M неподвижной (телом отсчета), определим относительное положение второй точки m радиусом-вектором $\mathbf{r}$, как это показано на рис. 1.20. Гравитационная сила $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ направлена против радиуса-вектора и ее проекция на последний отрицательна, т. е.

$$F_r = -\varkappa \frac{Mm}{r^2}. \tag{7.19}$$

Переместим теперь точку m из положения r_1 в положение r_2 вдоль радиуса. При таком перемещении на расстояние $\Delta r = r_2 - r_1$ гравитационная сила совершит работу

$$\Delta A = \bar{F}_r \cdot \Delta r = -\varkappa \frac{Mm}{r_1 \cdot r_2}(r_2 - r_1) = \frac{\varkappa Mm}{r_2} - \frac{\varkappa Mm}{r_1} = \Delta\left(\frac{\varkappa Mm}{r}\right). \tag{7.20}$$

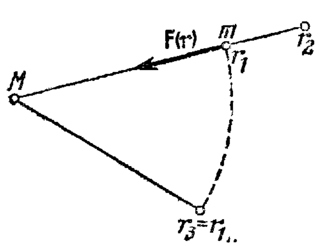

Рис. 1.20.

Поскольку в процессе перемещения сила F_r не оставалась постоянной, то при определении ее среднего значения $\bar{F}_r$ мы заменили r^2 на среднюю геометрическую из крайних значений r величину $r_1 \cdot r_2$. Из общего определения (6.5) тогда получим:

$$\Delta U = -\Delta\left(\frac{\varkappa Mm}{r}\right),$$

откуда

$$U(r) = -\varkappa \frac{Mm}{r} + C. \tag{7.21}$$

При перемещении по окружности из положения r_1 в положение $r_3 = r_1$ сила все время перпендикулярна перемещению, не совершает работы и не изменяет потенциальную энергию: $\Delta U = 0$ при $r_3 = r_1$. Таким образом, соотношение (7.21) справедливо для любой точки данного гравитационного поля. Произвольную постоянную C обычно полагают равной нулю, т. е. считают потенциальную энергию притяжения масс M и m равной нулю при $r = \infty$, когда эти массы бесконечно удалены друг от друга и не взаимодействуют ($F_r = 0$ при $r = \infty$).

При движении планеты вокруг Солнца под действием центральной (всегда направленной к центру) силы (7.19) выполняется закон сохранения полной энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} - \varkappa \frac{Mm}{r} = \text{const}. \tag{7.22}$$

При $E < 0$ движение ограничено ($r < \varkappa Mm/|E|$) и планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (рис. 1.21). Тело, влетевшее в Солнечную систему с положительной полной энергией $E > 0$, движется по незамкнутой орбите (парабола, гипербола) и покидает Солнечную систему с конечной скоростью $v_\infty = \sqrt{2E/m}$ при $r = \infty$.

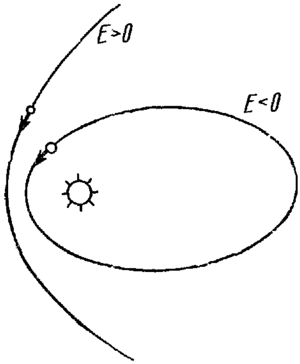

Рис. 1.21.

Из рассмотренных трех примеров видно, что при степенной зависимости F от расстояния показатель степени в выражении для потенциальной энергии U на единицу выше показателя степени в выражении для силы F. Это обстоятельство связано с общими правилами дифференциального исчисления. Действительно, переходя в общем выражении типа (7.13) к пределу и заменяя приращения дифференциалами, получаем $dU = -F_x\,dx$, или

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \tag{7.23}$$

т. е. сила равна производной от потенциальной энергии по соответствующей координате (лишь с обратным знаком). По правилам же дифференцирования степенной функции имеем

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}. \tag{7.24}$$

§ 8. Центральный удар шаров

В предыдущих параграфах мы познакомились с двумя важными законами механики: законом сохранения количества движения и законом сохранения энергии. Разберем конкретный пример, который покажет, как можно пользоваться этими законами сохранения для решения некоторых практически важных задач.

Рассмотрим удар двух шаров, центры которых движутся вдоль одной прямой (рис. 1.22, *а*, *б*). Шары движутся друг другу навстречу или движущийся позади шар m_1 догоняет передний шар m_2. В обоих случаях, при учете знаков скоростей выполняется соотношение $v_1 > v_2$. При этом в некоторый момент времени произойдет удар шаров, называемый (при указанных условиях для центров шаров) *центральным ударом*.

Рассмотрим сначала идеализированный случай *абсолютно упругого удара*, при котором не возникает тепла, т. е. сохраняется вся механическая энергия системы. В данном случае эта энергия складывается только из кинетических энергий