При $E < 0$ движение ограничено ($r < \varkappa Mm/|E|$) и планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (рис. 1.21). Тело, влетевшее в Солнечную систему с положительной полной энергией $E > 0$, движется по незамкнутой орбите (парабола, гипербола) и покидает Солнечную систему с конечной скоростью $v_\infty = \sqrt{2E/m}$ при $r = \infty$.

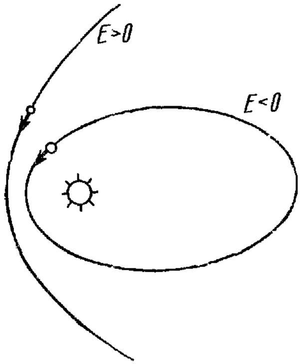

Рис. 1.21.

Из рассмотренных трех примеров видно, что при степенной зависимости F от расстояния показатель степени в выражении для потенциальной энергии U на единицу выше показателя степени в выражении для силы F. Это обстоятельство связано с общими правилами дифференциального исчисления. Действительно, переходя в общем выражении типа (7.13) к пределу и заменяя приращения дифференциалами, получаем $dU = -F_x\,dx$, или

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \tag{7.23}$$

т. е. сила равна производной от потенциальной энергии по соответствующей координате (лишь с обратным знаком). По правилам же дифференцирования степенной функции имеем

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}. \tag{7.24}$$

§ 8. Центральный удар шаров

В предыдущих параграфах мы познакомились с двумя важными законами механики: законом сохранения количества движения и законом сохранения энергии. Разберем конкретный пример, который покажет, как можно пользоваться этими законами сохранения для решения некоторых практически важных задач.

Рассмотрим удар двух шаров, центры которых движутся вдоль одной прямой (рис. 1.22, *а*, *б*). Шары движутся друг другу навстречу или движущийся позади шар m_1 догоняет передний шар m_2. В обоих случаях, при учете знаков скоростей выполняется соотношение $v_1 > v_2$. При этом в некоторый момент времени произойдет удар шаров, называемый (при указанных условиях для центров шаров) центральным ударом.

Рассмотрим сначала идеализированный случай абсолютно упругого удара, при котором не возникает тепла, т. е. сохраняется вся механическая энергия системы. В данном случае эта энергия складывается только из кинетических энергий шаров, а потенциальная энергия равна нулю (строго говоря, за исключением короткого момента соприкосновения шаров, когда они деформируются; но это, как мы увидим дальше, несущественно).

Для решения задачи о столкновении шаров необходимо, казалось бы, знать, какие силы возникают при столкновении и как эти силы изменяются со временем, что весьма сложно. Однако поставленную задачу можно решить, не прибегая непосредственно к уравнениям динамики и не внося никаких предположений о характере сил, возникающих в процессе самого удара. Это можно сделать, используя законы сохранения.

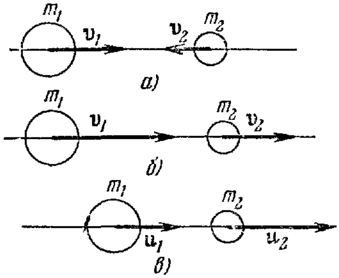

Рис. 1.22.

Обозначим скорости шаров, имеющих массы m_1 и m_2, до удара через v_1 и v_2, а после удара — через u_1 и u_2 соответственно (рис. 1.22, *в*). Как m_1 и m_2, так и v_1 и v_2 заданы. Требуется найти u_1 и u_2.

Так как удар центральный и движение одномерное, то в дальнейшем символы векторов опущены и все геометрические суммы заменены алгебраическими. При этом положительное значение скорости будет приписываться движению вправо, отрицательное — движению влево.

В применении к рассматриваемой задаче закон сохранения количества движения имеет вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \tag{8.1}$$

т. е. количество движения системы до столкновения должно быть равно количеству движения системы после столкновения.

Аналогично, закон сохранения энергии дает:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \tag{8.2}$$

Перенося члены, относящиеся к m_1, влево, а к m_2 — вправо и сокращая (8.2) на 1/2, получаем вместо (8.2) и (8.1) уравнения

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2), \tag{8.3}$$

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2). \tag{8.4}$$

Разделив почленно первое из этих уравнений на второе, получаем:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2, \tag{8.5}$$

освобождаясь, таким образом, от квадратов в уравнениях. Решая совместно уравнения (8.4) и (8.5), легко находим:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ &= \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_2 + m_1}. \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Для анализа полученного результата разберем несколько практически важных частных случаев, представляющих интерес для дальнейших разделов курса (молекулярная физика).

1. Соударение одинаковых шаров. Тогда $m_1 = m_2$, и

$$u_1 = v_2, \quad \text{а} \quad u_2 = v_1. \tag{8.7}$$

При упругом центральном ударе двух тел одинаковой массы последние просто обмениваются скоростями. Этот случай используется в ядерной физике для регистрации нейтронов. Поскольку масса нейтрона практически равна массе протона — ядра атома водорода, то при направлении пучка быстрых нейтронов на пластину из содержащего водород соединения (например, парафина) из последней вылетают выбитые протоны с такой же скоростью (рис. 1.23), и эти быстрые заряженные частицы уже легко регистрируются по производимой ими ионизации воздуха.

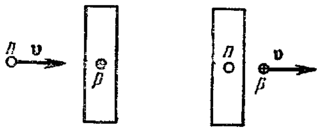

Рис. 1.23.

2. Удар шара о массивную стенку (например, удар молекулы газа о стенку цилиндра или о поверхность поршня). В этом случае $m_2 \gg m_1$ (рис. 1.24), и на основании (8.6) получим приближенно

$$\left.\begin{aligned} u_1 &\approx -v_1 + 2v_2, \\ u_2 &\approx v_2 + 2\frac{m_1}{m_2}v_1 \approx v_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

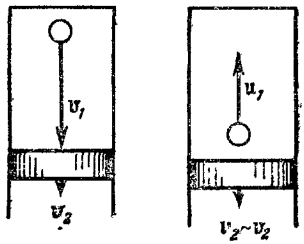

Рис. 1.24.

Как видно из (8.8), скорость массивного тела после удара меняется незначительно. В результате удара стенке передается значительная доля количества движения

$$m_2u_2 - m_2v_2 = 2m_1v_1,$$

но сравнительно небольшая часть энергии ударяющегося шара. Если стенка была первоначально неподвижной ($v_2 = 0$), то упруго ударившийся о нее шарик малой массы отскочит обратно практически с той же скоростью ($u_1 \approx -v_1$) и энергией.

При ударе о движущуюся стенку происходит обмен энергией тем больший, чем больше скорость ее движения v_2. Когда массивный поршень движется навстречу легкому шарику (например, при сжатии газа в цилиндре), то $v_2 < 0$ и согласно (8.8)

$$|u_1| = v_1 + 2|v_2| > v_1.$$

Следовательно, шарик отскакивает назад с бóльшими по величине скоростью и кинетической энергией, чем он имел до столкновения.

Если ударяющийся шарик догоняет уходящий от него поршень (при расширении газа в цилиндре), то $v_2 > 0$ и согласно (8.8) $|u_1| = v_1 - 2v_2 < v_1$. В этом случае шарик отскакивает назад со скоростью и энергией меньшими, чем до столкновения; при ударе часть кинетической энергии шарика передается поршню.

При ударе в зависимости от свойств вещества, из которого состоят шары (медь, сталь, слоновая кость), бо́льшая или меньшая часть энергии перейдет в тепло. Тело при этом испытает необратимую (пластическую) деформацию.

Крайним случаем этого положения является абсолютно неупругий удар (рис. 1.25). При таком ударе шары деформируются, и возникающие между ними силы взаимодействия будут тормозить ударяющийся шар и ускорять ударяемый до тех пор, пока скорости обеих шаров не сравняются. В этот момент суммарная кинетическая энергия обоих шаров уменьшится по сравнению с первоначальным ее значением до удара, так как часть ее будет затрачена на преодоление сопротивлений и перейдет в различные другие формы энергии (тепло, энергию пластических деформаций и т. д.).

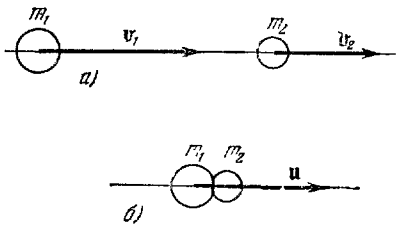

Рис. 1.25.

При полном отсутствии упругих деформаций процесс удара на этом заканчивается, взаимодействие шаров прекращается, и оба шара будут продолжать двигаться далее совместно с одной и той же скоростью u. Для определения скорости после удара достаточно одного уравнения, даваемого законом сохранения количества движения:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u, \tag{8.9}$$

откуда

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{8.10}$$

Легко вычислить потерю системой механической энергии E', перешедшей в тепло и другие формы энергии. Она равна разности энергий до и после удара:

$$E' = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\, u^2}{2}. \tag{8.11}$$

Подставляя сюда значение u из (8.10), легко находим:

$$E' = \frac{m_1 m_2}{2\,(m_1 + m_2)} \cdot (v_1 - v_2)^2. \tag{8.12}$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \tag{8.13}$$

и

$$E' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2}. \tag{8.14}$$

Когда неподвижное тело имеет очень большую массу ($m_2 \gg m_1$), то $u \ll v_1$ и почти вся кинетическая энергия ударяющегося тела при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому в кузницах делают массивные наковальни, чтобы бóльшая часть кинетической энергии молота затрачивалась на необратимую деформацию поковки. Наоборот, при забивании гвоздей или свай целесообразно иметь бóльшую массу молота ($m_1 \gg m_2$), так как тогда $u \approx v_1$ и практически вся энергия удара затрачивается на преодоление сопротивления стены или грунта, а не на остаточную деформацию ударяемого тела.

Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары являются идеальными предельными случаями. При соударении реальных тел всегда имеют место и упругие, и остаточные деформации, и поэтому удар будет частично неупругим. При абсолютно упругом ударе согласно (8.5)

$$u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2), \tag{8.15}$$

т. е. относительная скорость шаров после удара равна по величине и направлена противоположно их относительной скорости до удара. При абсолютно неупругом ударе эта относительная скорость после удара равна нулю, так как $u_1 = u_2 = u$. При частично неупругом ударе относительная скорость после удара равна некоторой доле относительной скорости до удара:

$$u_1 - u_2 = -\varepsilon \cdot (v_1 - v_2), \tag{8.16}$$

где ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) есть так называемый *коэффициент восстановления относительной скорости при ударе*. При ударе стальных шаров $\varepsilon = 0{,}56$, для шаров из слоновой кости $\varepsilon = 0{,}89$, для свинца ε близко к нулю.

Следующие разделы механики, с которыми нам предстоит познакомиться, основаны на применении к различным частным вопросам (вращательное движение, механика жидких и газообразных сред) рассмотренных выше общих законов механики. Поэтому раньше, чем перейти к ним, мы обсудим границы применимости этих законов.