ГЛАВА III

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

§ 10. Кинематика вращательного движения

Наиболее общие случаи вращательного движения — вращение свободного тела или тела, закрепленного в одной точке, — весьма сложны и детально рассматриваются в курсах теоретической механики. Для установления основных закономерностей вращательного движения мы рассмотрим здесь простейший случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

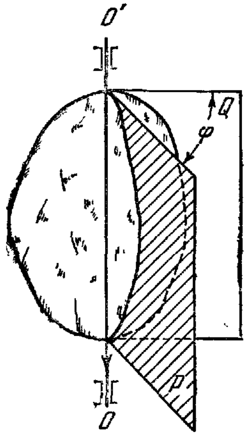

Рис. 1.26.

Назовем абсолютно твердым телом такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого во время движения остается неизменным. (Здесь мы опять вводим абстракцию, позволяющую отвлечься от несущественных для рассматриваемого явления деталей — малых деформаций реальных твердых тел.)

Рассмотрим абсолютно твердое тело с закрепленной осью $O'O$, изображенное на рис. 1.26. Выберем для определенности положительное направление этой оси от точки O' к точке O, т. е. вниз, как это показано на рисунке стрелкой. Проведем через эту ось две плоскости: Q и P. Неподвижная плоскость Q будет являться телом отсчета. Подвижная же плоскость P скреплена с телом и вращается вместе с ним. Мгновенное положение этой плоскости будет характеризоваться величиной двугранного угла φ, который она составляет с неподвижной плоскостью Q. Задание одного числа — угла поворота φ в этом случае целиком определяет расположение (ориентацию) тела; тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет лишь одну степень свободы.

Условимся при этом угол φ считать положительным, если вращение происходит по направлению правого винта относительно оси $O'O$. Иными словами, при наблюдении вдоль оси сверху угол φ отсчитывается по часовой стрелке. При вращении на несколько оборотов угол φ окажется кратным 2π. При вращении в обратном направлении угол φ будет отрицательным.

Изменение угла поворота со временем

$$\varphi = \varphi(t) \tag{10.1}$$

зависит от характера вращательного движения тела; (10.1) называется *уравнением вращательного движения тела*.

При вращении всего твердого тела в целом отдельные его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения. Действительно, рассмотрим произвольную точку M (рис. 1.27), находящуюся на расстоянии r от оси вращения. Для абсолютно твердого тела это расстояние будет оставаться неизменным во все время движения и точка M будет двигаться по окружности постоянного радиуса

$$r = \mathrm{const} \tag{10.2}$$

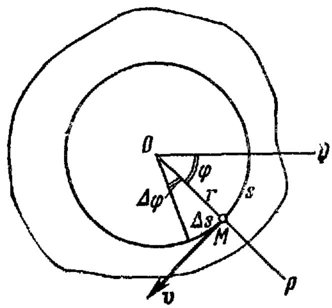

Рис. 1.27.

с центром на оси вращения $O'O$. Для разных точек вращающегося тела величина r может быть различной.

Кинематические характеристики различных движущихся точек (путь, скорость, ускорение) связаны друг с другом и с кинематическими характеристиками движения всего тела в целом. Рассмотрим произвольную точку M, лежащую в подвижной плоскости P. Угол поворота всего тела φ и путь s, пройденный точкой M, будем отсчитывать от неподвижной плоскости Q, как указывалось выше, по часовой стрелке (рис. 127). Если φ измерять в радианах, то s и φ связаны известным равенством

$$s = r \cdot \varphi. \tag{10.3}$$

За промежуток времени Δt тело повернется на угол $\Delta\varphi$ и точка M пройдет путь

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi. \tag{10.4}$$

Разделив обе части равенства (10.4) на Δt и переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{10.5}$$

Величина $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ представляет согласно (2.3) абсолютную величину линейной скорости движения точки M. По аналогии с этим величина

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad (10.6)$$

характеризующая быстроту изменения угла поворота, называется угловой скоростью вращения тела. Угловая скорость измеряется в радианах в секунду, а в технике — в оборотах в минуту:

$$1 \text{ об/мин} = \frac{2\pi \text{ рад}}{60 \text{ с}} = \frac{\pi}{30} \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Из (10.5) и (10.6) следует, что

$$v = r \cdot \omega. \qquad (10.7)$$

При неравномерном вращении величина ω меняется со временем и за промежуток времени Δt получает приращение $\Delta\omega$, при этом линейная скорость произвольной точки M также получает численное приращение Δv, равное

$$\Delta v = \Delta (r \cdot \omega) = r \cdot \Delta\omega \qquad (10.8)$$

(так как r для любой фиксированной точки есть величина постоянная). Разделив обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}. \qquad (10.9)$$

Согласно (2.11) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = w_к$ называется касательным, или линейным ускорением движущейся точки.

По аналогии с этим величина

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \qquad (10.10)$$

характеризующая быстроту изменения во времени угловой скорости, называется угловым ускорением всего вращающегося тела. В системах единиц СГС и СИ угловое ускорение измеряется в рад/с^2. Из уравнений (10.9) и (10.10) следует, что

$$w_к = r \cdot \varepsilon. \qquad (10.11)$$

Равенства (10.3), (10.7) и (10.11) показывают, что линейные величины (s, v, $w_к$), характеризующие движение отдельной точки M, получаются из соответственных угловых величин (φ, ω, ε), характеризующих движение всего тела как целого, простым умножением на радиус вращения r.

При вращательном движении точки M ее скорость $\mathbf{v}$ *направлена по касательной к траектории и непрерывно меняет свое направление.* Быстрота изменения направления скорости характеризуется нормальным ускорением $\mathbf{w}_н$. Согласно (2.17)

$$w_н = \frac{v^2}{r}, \tag{10.12}$$

так как радиус кривизны траектории точки M остается постоянным ($R = r$).

На первый взгляд нормальное ускорение точек твердого тела убывает обратно пропорционально расстоянию до оси вращения. Однако не надо забывать, что по мере удаления от оси v также возрастает. Подставляя (10.7) в (10.12), получим:

$$w_н = \omega^2 \cdot r. \tag{10.13}$$

Так как ω одинакова для всех точек тела, то, следовательно, центростремительное ускорение растет с удалением от оси. Чтобы заставить вращаться с той же самой угловой скоростью более удаленные от оси точки маховика, необходимо сообщить им большее центростремительное ускорение и приложить для этого бо́льшую центростремительную силу. По третьему закону динамики эти точки будут действовать на удерживающие их связи (спицы маховика) с такой же по величине ц е н т р о б е ж н о й с и л о й, величина которой, как следует из (10.13), прямо пропорциональна радиусу вращения и квадрату угловой скорости.

Согласно (2.18) и (2.19) вектор полного ускорения точки M равен

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_к + \mathbf{w}_н, \tag{10.14}$$

а его величина

$$w = \sqrt{w_к^2 + w_н^2} = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{10.15}$$

При равномерном вращении твердого тела

$$\varepsilon = 0, \quad \omega = \mathrm{const} \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{10.16}$$

При равноускоренном вращении

$$\varepsilon = \mathrm{const}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{10.17}$$

§ 11. Динамика вращения

Чтобы твердое тело с закрепленной осью привести во вращательное движение, необходимо хотя бы в одной из его точек приложить внешнюю силу $\mathbf{F}$, не проходящую через ось вращения и не параллельную ей. Рассмотрим простейший случай, когда сила $\mathbf{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. При этом