При вращательном движении точки M ее скорость $\mathbf{v}$ *направлена по касательной к траектории и непрерывно меняет свое направление.* Быстрота изменения направления скорости характеризуется нормальным ускорением $\mathbf{w}_н$. Согласно (2.17)

$$w_н = \frac{v^2}{r}, \tag{10.12}$$

так как радиус кривизны траектории точки M остается постоянным ($R = r$).

На первый взгляд нормальное ускорение точек твердого тела убывает обратно пропорционально расстоянию до оси вращения. Однако не надо забывать, что по мере удаления от оси v также возрастает. Подставляя (10.7) в (10.12), получим:

$$w_н = \omega^2 \cdot r. \tag{10.13}$$

Так как ω одинакова для всех точек тела, то, следовательно, центростремительное ускорение растет с удалением от оси. Чтобы заставить вращаться с той же самой угловой скоростью более удаленные от оси точки маховика, необходимо сообщить им большее центростремительное ускорение и приложить для этого бóльшую центростремительную силу. По третьему закону динамики эти точки будут действовать на удерживающие их связи (спицы маховика) с такой же по величине центробежной силой, величина которой, как следует из (10.13), прямо пропорциональна радиусу вращения и квадрату угловой скорости.

Согласно (2.18) и (2.19) вектор полного ускорения точки M равен

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_к + \mathbf{w}_н, \tag{10.14}$$

а его величина

$$w = \sqrt{w_к^2 + w_н^2} = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{10.15}$$

При равномерном вращении твердого тела

$$\varepsilon = 0, \quad \omega = \mathrm{const} \quad и \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{10.16}$$

При равноускоренном вращении

$$\varepsilon = \mathrm{const}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad и \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{10.17}$$

§ 11. Динамика вращения

Чтобы твердое тело с закрепленной осью привести во вращательное движение, необходимо хотя бы в одной из его точек приложить внешнюю силу $\mathbf{F}$, не проходящую через ось вращения и не параллельную ей. Рассмотрим простейший случай, когда сила $\mathbf{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. При этом вращательное действие силы **F** определяется не только величиной силы F, но и расстоянием ее линии действия от оси вращения, так называемым п л е ч о м p. По известному правилу рычага действие силы **F** можно уравновесить действием силы **F′**, вращающей тело в противоположном направлении (рис. 1.28), если выполнено условие

$$F \cdot p = F' \cdot p'. \tag{11.1}$$

Произведение величины силы на плечо

$$M = F \cdot p = F \cdot r \cdot \sin\alpha = r \cdot F \cdot \sin\left(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{F}}\right) = r \cdot F_{\text{к}} \tag{11.2}$$

носит название в р а щ а т е л ь н о г о м о м е н т а, или м о м е н т а с и л ы о т н о с и т е л ь н о о с и в р а щ е н и я. Здесь, как видно из чертежа, r есть расстояние от точки приложения силы до оси вращения, а $F_{\text{к}} = F \cdot \sin\left(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{F}}\right)$ — проекция силы на направление касательной к траектории движения точки ее приложения.

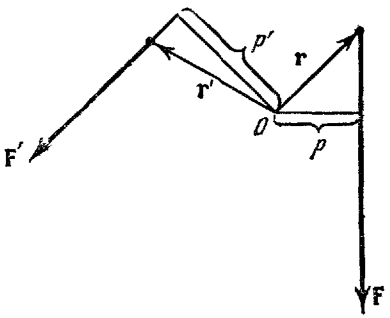

Рис. 1.28.

Угол $\alpha = \left(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{F}}\right)$ и момент силы имеют знак. Если сила вращает тело по часовой стрелке (правый винт по отношению к оси $O'O$), то мы будем считать ее момент положительным, если же она вращает тело против часовой стрелки — отрицательным *).

В частном случае, когда $\alpha = 0$, линия действия силы пересекает ось и $M = 0$. Такая сила будет уравновешиваться реакциями подшипников (см. рис. 1.26) и не вызовет вращения.

Для сил **F** и **F′**, изображенных на рис. 1.28, моменты относительно оси соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} M &= F \cdot p, \\ M' &= -F' \cdot p'. \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

Тогда условие равновесия (11.1) принимает вид

$$M + M' = F \cdot p - F' \cdot p' = 0. \tag{11.4}$$

Иными словами, действующие на тело *силы* **F** и **F′** *не вызывают вращения, если их моменты* M и M' *взаимно уравновешиваются,* т. е. равны по величине и обратны по знаку.

*) Момент силы есть вектор. Рассматриваемый нами здесь момент силы относительно оси есть проекция этого вектора на ось вращения.

Если на тело, закрепленное на оси, действует несколько сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, то суммарное их действие будет эквивалентно действию одного момента M, равного алгебраической сумме моментов всех действующих сил:

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} M_i = \sum_{i=1}^{i=n} r_i \cdot F_i \cdot \sin \alpha_i. \tag{11.5}$$

Перейдем теперь к выводу уравнения движения тела, имеющего закрепленную в пространстве ось вращения. Для этого мысленно разобьем тело на совокупность отдельных точек с массами $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_i, \ldots$ Каждая из этих точек находится на расстоянии от оси вращения, равном соответственно $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots$ На точку с индексом i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) действует в данный момент некоторая сила $\mathbf{F}_i$, которая представляет собой равнодействующую всех приложенных к этой точке внешних и внутренних сил,

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\text{внешн}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{внутр}}. \tag{11.6}$$

Внешние силы обычно приложены лишь в некоторых определенных точках тела, и для всех остальных точек $\mathbf{F}_i^{\text{внешн}} = 0$. Внутренние же силы взаимодействия, удерживающие точки твердого тела на определенных расстояниях друг от друга, приложены к каждой точке вращающегося тела.

По второму закону динамики ускорение данной точки связано с силой соотношением

$$\boldsymbol{F}_i = m_i \mathbf{w}_i. \tag{11.7}$$

Точка тела с массой m_i движется по окружности радиуса r_i. Спроецируем векторы $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{w}_i$ (11.7) на направление касательной к траектории точки. Тогда, учитывая (10.11), найдем:

$$F_{i,\,\text{к}} = m_i w_{i,\,\text{к}} = m_i r_i \varepsilon. \tag{11.8}$$

Умножив обе части этого равенства на r_i и подставив в (11.2), получим:

$$M_i = m_i r_i^2 \varepsilon, \tag{11.9}$$

где M_i есть момент действующей на данную точку тела силы $\mathbf{F}_i$ относительно оси вращения. Поскольку согласно (11.6) сила $\mathbf{F}_i$ есть геометрическая сумма двух сил, то по правилам векторного исчисления ее момент равен алгебраической сумме моментов внешней и внутренней сил, действующих на i-ю точку,

$$M_i = M_i^{\text{внешн}} + M_i^{\text{внутр}}. \tag{11.10}$$

Тогда

$$M_i^{\text{внешн}} + M_i^{\text{внутр}} = m_i r_i^2 \varepsilon. \tag{11.11}$$

Уравнения (11.11) справедливы для каждой точки тела. Просуммируем эти уравнения для всех точек вращающегося тела:

$$\sum_i M_i^{\text{внешн}} + \sum_i M_i^{\text{внутр}} = \varepsilon \cdot \sum_i m_i r_i^2. \qquad (11.12)$$

По третьему закону динамики каждой внутренней силе в системе всегда соответствует сила, равная ей по величине и обратно направленная по той же прямой. Моменты этих сил попарно равны по величине и обратны по знаку. Поэтому очевидно, что алгебраическая сумма моментов всех неизвестных нам внутренних сил равна нулю:

$$\sum_i M_i^{\text{внутр}} = 0. \qquad (11.13)$$

Алгебраическую сумму моментов всех внешних сил, действующих на тело, назовем полным моментом внешних сил и обозначим

$$M^{\text{внешн}} = \sum_i M_i^{\text{внешн}}. \qquad (11.14)$$

В правую часть уравнения (11.12) входит сумма

$$\sum_i m_i r_i^2 = I, \qquad (11.15)$$

которая носит название момента инерции тела относительно заданной оси вращения. *Момент инерции тела I численно равен сумме произведений масс всех его точек на квадраты их расстояний до оси вращения.* Величина этого момента инерции зависит не только от массы всего тела и ее распределения в теле, но также от ориентации тела относительно оси вращения.

При введенных обозначениях уравнение (11.12) принимает вид

$$M^{\text{внешн}} = I \cdot \varepsilon. \qquad (11.16)$$

Уравнение (11.16) позволяет найти угловое ускорение вращающегося тела ε по известному моменту внешних сил и выражает второй закон динамики для вращательного движения. Это уравнение аналогично второму закону динамики (3.7) для поступательного движения:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{w}.$$

Сопоставляя (11.16) и (3.7), мы видим, что при вращательном движении роль силы играет момент силы M, роль ускорения играет угловое ускорение ε, а роль массы играет момент инерции I. Последний характеризует инерцию тела при вращательном движении: чем больше I, тем меньшее угловое ускорение ε получит тело под действием данного момента внешних сил $M^{\text{внешн}}$.

Если рассматриваемое тело представляет собой обруч массы m, толщина которого мала по сравнению с радиусом R, то момент его инерции относительно оси, проходящей через центр и перпендикулярной к плоскости обруча, равен

$$I_{\text{обр}} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i R^2 = R^2 \cdot \sum_i m_i = mR^2.$$

Для тел более сложной формы суммирование выражения (11.15) производится методами интегрального исчисления. Так, например, для сплошного диска или сплошного цилиндра момент инерции относительно оси цилиндра равен

$$I_{\text{цил}} = \frac{1}{2} mR^2.$$

Момент инерции тонкого цилиндра (стержня) высотой h относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к стержню, равен

$$I_{\text{ст}} = \frac{1}{12} mh^2.$$

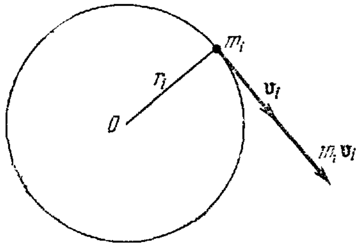

Рис. 1.29.

Для решения практических задач динамики вращательного движения можно получить ряд важных следствий из основного уравнения (11.16). Используя определение (10.10), перепишем (11.16) в виде

$$M^{\text{внешн}} = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{11.17}$$

где $M^{\text{внешн}}$ — среднее значение момента внешних сил за бесконечно малый промежуток времени Δt. Умножим обе части равенства на Δt. Тогда

$$M^{\text{внешн}} \cdot \Delta t = I\Delta\omega = I\omega_2 - I\omega_1,$$

или

$$M^{\text{внешн}} \cdot \Delta t = \Delta (I\omega). \tag{11.18}$$

Для выяснения физического смысла величины $I\omega$ вернемся к рассмотрению движения отдельных точек вращающегося тела. Каждая из этих точек с массой m_i движется по окружности постоянного радиуса r_i (рис. 1.29). Ее скорость в данный момент времени $\mathbf{v}_i$ и вектор количества движения $m_i\mathbf{v}_i$ перпендикулярны к этому радиусу. Таким образом, радиус r_i является плечом по отношению к $m\mathbf{v}_i$, и мы можем (аналогично моменту силы) ввести понятие **момента количества движения точки**

$$L_i = m_i v_i r_i \tag{11.19}$$

как произведения величины вектора количества движения на его плечо относительно оси вращения.

Алгебраическая сумма моментов количества движения всех точек вращающегося твердого тела носит название **момента количества движения тела относительно оси**:

$$L = \sum_i L_i. \tag{11.20}$$

Подставляя в (11.20) выражение для L_i из (11.19) и используя (10.7), получаем, что

$$L = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_i m_i r_i^2 = I\omega, \tag{11.21}$$

т. е. величина $I\omega$ есть момент количества движения вращающегося тела. Стоящее в левой части равенства (11.18) произведение момента сил на время его действия называется **импульсом момента внешних сил**. Уравнение (11.18) выражает так называемый **закон момента количества движения**: *Импульс момента внешних сил, действующих на вращающееся тело, равен изменению его момента количества движения.*

Если внешние силы отсутствуют (замкнутая система) или таковы, что их суммарный момент равен нулю ($M^{\text{внешн}} = 0$), то (11.18) принимает вид так называемого **закона сохранения момента количества движения**

$$I\omega = \text{const}. \tag{11.22}$$

Например, Земля вращается вокруг своей оси, совершая один оборот за 24 часа. На Землю действует внешняя сила — суммарная сила притяжения отдельных ее точек к Солнцу. Эта результирующая сила приложена к центру Земли и проходит через ось вращения. Плечо и момент этой силы, следовательно, равны нулю.

Поэтому момент количества движения Земли остается постоянным. Если бы момент инерции Земли не менялся (I = const), то отсюда следовало бы постоянство угловой скорости вращения Земли (ω = const) и продолжительности суток. Практически вследствие непрерывного падения на Землю метеоритов масса и момент инерции Земли медленно возрастают и угловая скорость ее, в силу указанной и других причин, уменьшается так, что продолжительность суток возрастает примерно на 0,57 с за столетие. Поэтому в системе СИ единица времени — секунда определяется из продолжительности более устойчивого процесса — обращения Земли вокруг Солнца.

Закон сохранения момента количества движения используется цирковыми артистами. Например, акробат, переворачиваясь, наклоняется и сгибает колени. При этом момент его инерции убывает, а угловая скорость вращения соответственно увеличивается.

В демонстрационном опыте на лекциях по физике экспериментатор становится на горизонтальную «скамью Жуковского», которая может вращаться относительно вертикальной оси с малым трением. Он берет велосипедное колесо, быстро вращающееся вокруг вертикальной оси, например, по часовой стрелке (рис. 1.30, *а*). Если он резко переворачивает колесо, как это изображено на рис. 1.30, *б*, то знак момента количества движения колеса $I_к\omega_к$ изменяется на обратный ($-I_к\omega_к$). Поскольку поворот колеса совершается под действием внутренних сил, то полный момент количества движения системы должен по (11.22) оставаться постоянным. Действие закона сохранения момента количества движения проявляется в том, что вся система (человек — скамья) начинает вращаться в ту же сторону, в которую первоначально вращалось колесо.

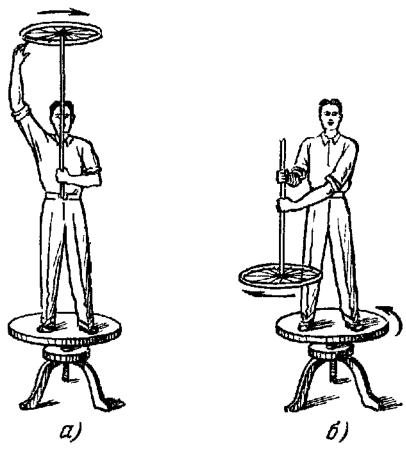

Рис. 1.30.

Закон сохранения момента количества движения выполняется и в более сложном случае тела с незакрепленной осью. Если твердое тело вращается с большим моментом количества движения относительно оси, совпадающей с осью геометрической симметрии тела, то для заметного изменения ориентации оси вращения в пространстве оказывается необходимым прикладывать очень большие внешние силы.

Это свойство вращательного движения широко применяется в различных волчках, от маленькой игрушечной юлы до больших современных г и р о с к о п о в, ослабляющих качку корабля.

Кинетическая энергия вращающегося тела представляет собой алгебраическую сумму кинетических энергий отдельных его точек, т. е.

$$E_{кин} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (11.23)$$

Работа внешней силы при вращении

$$\Delta A = F_{i,к}\,\Delta s = F_{i,к} r_i\,\Delta\varphi = M_i\,\Delta\varphi, \qquad (11.24)$$

т. е. *равна произведению момента силы на угол поворота тела.* Эта работа затрачивается на увеличение кинетической энергии вращающегося тела

$$\Delta A = \frac{I\omega_{\text{кон}}^2}{2} - \frac{I\omega_{\text{нач}}^2}{2}. \tag{11.25}$$

В случае, если тело движется поступательно со скоростью v и одновременно вращается вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, то полная кинетическая энергия его движения равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \tag{11.26}$$

Из рассмотрения (11.26) мы еще раз убеждаемся, что момент инерции при вращательном движении играет такую же роль, как масса материальной точки при поступательном ее движении.