

ГЛАВА IV

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ (элементы гидро- и аэродинамики)

§ 12. Уравнение Д. Бернулли

Рассмотрим применение основных законов динамики к простейшим случаям движения жидкости. Под понятием жидкость в настоящем параграфе мы будем объединять и собственно жидкости (воду, спирт, ртуть и другие тела в жидком агрегатном состоянии), и газы. Общим для обоих случаев является то, что в отличие от твердого тела отдельные частицы жидкости могут перемещаться друг относительно друга, и жидкость, помещенная в какой-либо сосуд, заполняет его и принимает форму сосуда.

Ограничимся простейшим случаем движения жидкости, когда выполняются следующие три условия.

1. Жидкость несжимаема, т. е. плотность ρ (кг/м³) отдельных движущихся элементов объема жидкости остается во все время движения постоянной.

Для жидкостей подобное приближение вполне естественно, так как их сжимаемость очень невелика. Например, для увеличения плотности жидкой воды, находящейся при комнатной температуре, на 1% необходимо приложить давление около 200 атм. *) При таком давлении струя воды, вылетающая из резервуара в атмосферу, будет иметь начальную скорость порядка 200 м/с.

В противоположность жидкостям газы сжимаются легко, и их плотность прямо пропорциональна давлению. Благодаря малому значению плотности для приведения газа в движение достаточно очень малого изменения давления, а следовательно, и плотности газа. Например, чтобы воздух проходил через вентилятор со скоростью 10 м/с, достаточно создать разрежение порядка 1 мм рт. ст., т. е. почти 10^{-3} атм. Следовательно, и плотность воздуха при таких скоростях изменится всего лишь на 10^{-3} своей величины, т. е. на 0,1%.

*) 1 атм $\approx 10^5$ Н/м².

Теория и опыт показывают, что сжимаемостью жидкости или газа можно пренебрегать и с достаточной степенью точности пользоваться понятием несжимаемой жидкости при условии, что скорости их движения малы по сравнению со скоростью распространения звука. Скорость звука в воздухе $v_{зв} = 333 \text{ м/с} \approx 1200 \text{ км/ч}$. Поэтому обычно при изучении сопротивления воздуха движению тел (автомобиля, поезда или легкого самолета, движущегося со скоростью 200 км/ч) можно считать воздух практически несжимаемым. Однако для современных реактивных самолетов, скорости которых достигают и превышают скорость звука, пренебрегать сжимаемостью воздуха уже нельзя.

Таким образом, мы приходим к выводу, что понятие «несжимаемости» характеризует не столько свойства самой жидкости при отсутствии движения, сколько свойства данного движения. И жидкости, и газы при движении практически несжимаемы, когда

$$v_{\text{движ}} \ll v_{\text{зв}}. \quad (12.1)$$

2. Жидкость идеальна, т. е. отдельные элементы жидкости движутся друг относительно друга без трения. Справедливость подобного пренебрежения трением также зависит от характера изучаемого движения. При движении реальной жидкости или газа внутри нее всегда возникают силы вязкости. Мы будем называть жидкость идеальной тогда, когда во время ее движения можно пренебречь силами внутреннего трения по сравнению с другими силами, действующими в жидкости (силами тяжести, давления и т. п.). В этих случаях потери энергии движения на трение и переход в тепло незначительны и можно применять закон сохранения энергии в чисто механической форме (6.11).

3. Движение жидкости установившееся. Если внешние силы, вызывающие движение жидкости, не зависят от времени, то через некоторое время после начала движения в жидкости установится вполне определенное распределение скоростей. При этом скорость движения каждой частицы жидкости может изменяться от точки к точке вдоль ее траектории. Однако в каждой данной точке пространства скорости движения всех последовательно проходящих через нее частиц жидкости будут одинаковыми. Такое движение жидкости в данной ограниченной части пространства и называется установившимся.

В 1738 г. Д. Бернулли вывел очень важное соотношение для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости, носящее название уравнения Бернулли.

Для вывода этого уравнения рассмотрим жидкость, движущуюся по трубе переменного сечения (рис. 1.31). Жидкость втекает слева в сечение 1 площадью S_1 , находящееся на высоте z_1 над уровнем земли. Скорость втекающих частиц жидкости перпендикулярна

к сечению трубы и равна v_1 , давление в жидкости при входе в трубу равно p_1 .

Через сечение 2 площадью S_2 , находящееся на высоте z_2 над уровнем земли, жидкость вытекает из трубы со скоростью v_2 ; давление в жидкости на выходе из трубы равно p_2 . Жидкость течет через трубу под действием разности приложенных извне давлений $p_1 - p_2$ или разности уровней $z_1 - z_2$, приводящей к гидростатическому давлению соответствующего столба жидкости, или того и другого вместе.

За бесконечно малый промежуток времени Δt через сечение 1 втекает масса жидкости Δm , заполняющая цилиндрок с площадью основания S_1 и высотой $v_1 \Delta t$ (заштрихованный на рис. 1.31). За тот же промежуток времени через сечение 2 вытечет такая же масса жидкости Δm , заполнявшая цилиндрок с площадью основания S_2 и высотой $v_2 \Delta t$ (также заштрихованный на рис. 1.31). Значение Δm можно найти, умножив величину каждого из этих элементарных объемов на плотность жидкости ρ . Тогда получим:

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t. \quad (12.2)$$

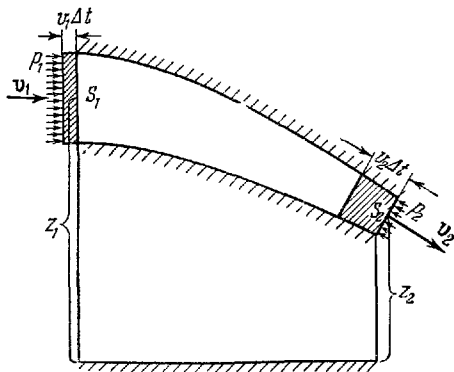


Рис. 1.31.

Сокращая обе части уравнения (12.2) на $\rho \Delta t$, мы получаем, что для несжимаемой жидкости на основании закона сохранения вещества всегда выполняется простое соотношение между величиной сечения и скоростью течения жидкости:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad \text{или} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (12.3)$$

Иначе говоря, *объемы втекающей и вытекающей за единицу времени жидкости равны.*

При перемещении массы жидкости Δm по трубе силы внешнего давления совершают работу. Полная сила давления, действующая на левое сечение, равна $p_1 S_1$. Эта сила переместила массу жидкости Δm на расстояние $v_1 \Delta t$. За то же время в правом сечении такая же масса жидкости Δm переместилась на расстояние $v_2 \Delta t$ и совершила работу против силы давления $p_2 S_2$.

Полная работа ΔA сил давления при таком перемещении равна

$$\Delta A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Эта работа затрачена на увеличение кинетической энергии элемента жидкости с массой Δm , скорость которого изменилась от v_1 на входе до v_2 на выходе, и на изменение потенциальной энергии этого элемента в поле тяжести при переходе с уровня z_1 на уровень z_2 . Следовательно,

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot g z_2 - \Delta m \cdot g z_1. \quad (12.4)$$

Разделим обе части равенства на объем $\Delta V = S_1 v_1 \Delta t$. Тогда, имея в виду, что согласно (12.2)

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{S_1 v_1 \Delta t} \quad \text{и} \quad \frac{S_2 v_2 \Delta t}{S_1 v_1 \Delta t} = 1,$$

получим:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_2 - \rho g z_1. \quad (12.5)$$

Перенесем здесь все члены уравнения, соответствующие жидкости в сечении 1, в левую часть, а соответствующие жидкости в сечении 2 — в правую часть. Тогда

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2. \quad (12.6)$$

Поскольку сечения 1 и 2 могут быть выбраны произвольно, то, следовательно, сумма $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z$ остается неизменной в любом сечении трубы и

$$\boxed{p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = \text{const.}} \quad (12.7)$$

Уравнение (12.7) называется уравнением Бернулли и выражает закон сохранения энергии при установившемся движении несжимаемой идеальной жидкости. Это уравнение справедливо для любого движущегося объема жидкости вдоль траектории его движения, называемой *линией тока*.

Величина $\frac{1}{2} \rho v^2$ представляет собой удельную кинетическую энергию, т. е. кинетическую энергию единицы объема движущейся жидкости (Дж/м³). Величина $\rho g z$ есть удельная потенциальная энергия в поле тяжести. Соответственно этому имеющая ту же размерность величина p (Н/м² = Дж/м³) представляет собой удельную потенциальную энергию сил давления в жидкости.

При движении элементарного объема жидкости происходит непрерывный переход его энергии из одной формы в другую, но полная энергия этого объема остается неизменной.

Так как все члены уравнения (12.7) имеют размерность давления, то это уравнение часто формулируют иначе. Давление p называют

статическим напором, величину $\rho g z$ — гидравлическим напором, а величину $\frac{1}{2}\rho v^2$ — скоростным или динамическим, напором. Тогда из (12.7) следует, что полный напор в движущейся жидкости, складывающийся из статического, гидравлического и скоростного напоров, остается постоянным. Приведем для пояснения два примера.

На рис. 1.32 изображена схема водоструйного насоса. Поток воды из водопровода течет по трубке с местным сужением. В узком сечении скорость жидкости резко возрастает и увеличивается скоростной напор $\frac{1}{2}\rho v_2^2$. При этом по уравнению Бернулли в суженном сечении падает статический напор и давление p_2 становится ниже атмосферного. Поэтому через отводную трубку в это сечение засасывается воздух из откачиваемого сосуда А. Пройдя суженное

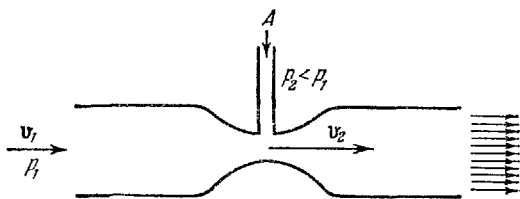


Рис. 1.32.

сечение, струя воды с воздухом вновь расширяется, ее скорость падает, а давление возрастает до атмосферного на выходе из насоса. Такой насос очень прост по конструкции и может создавать значительное разрежение, понижая давление в откачиваемом сосуде до $\sim 10^{-3}$ атм.

Работами Д. Бернулли и его современника Эйлера были заложены основы науки о движении жидкостей, выросшей в настоящее время в самостоятельную науку — г и д р о д и н а м и к у. Широкое практическое применение гидродинамика получила в конце XIX и начале XX веков в результате работ Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина.

Жуковским и Чаплыгиным была создана также новая наука — а э р о д и н а м и к а — учение о законах движения газов и теория полета. В. И. Ленин называл Н. Е. Жуковского отцом русской авиации. Жуковскому первому удалось объяснить механизм подъемной силы, создаваемой крылом аэроплана при движении. На рис. 1.33 изображен разрез примерного профиля крыла. Пунктиром показаны линии тока встречного течения воздуха. Как видно из рисунка, над верхней частью крыла происходит сгущение этих линий и увеличение относительной скорости воздушного потока. Согласно уравнению Бернулли давление в потоке над крылом станет меньше, чем под крылом, и за счет этой разности давлений

возникает подъемная сила F , удерживающая летящий самолет в воздухе.

На основе этой качественной картины Н. Е. Жуковский разработал количественные методы расчета величины подъемной силы для различных профилей крыла. Созданные им профили, ныне называемые п р о ф и л я м и Ж у к о в с к о г о, позволили проектировать крылья наивыгоднейшей формы.

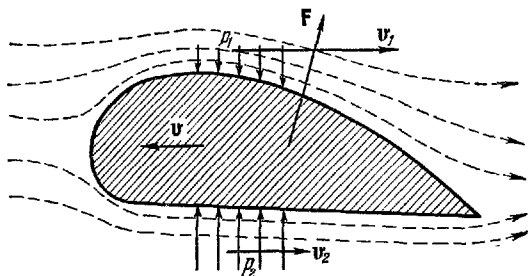


Рис. 1.33.

Как уже указывалось выше, при скоростях полета современных скоростных самолетов воздух уже нельзя считать несжимаемой жидкостью. Методы учета сжимаемости воздуха были разработаны С. А. Чаплыгиным еще в 1903 г., когда скорости полета не превышали 30—40 км/ч. На основе этих методов рассчитываются подъемная сила и сопротивление крыльев при современных скоростях полета.