ЧАСТЬ IV
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ГЛАВА XIII
ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 50. Кинематика гармонического колебания

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике. Качание маятника часов, волны на воде, переменный электрический ток, свет, звук являются примерами колебаний различных физических величин. При движении маятника колеблется координата его центра тяжести. В случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Эти два процесса качественно совершенно различны по своей физической природе. Однако количественные закономерности этих процессов имеют между собой очень много общего.

Основные характеристики колебательных процессов мы изучим сначала на примере механических колебаний материальной точки. Ранее мы уже познакомились с другими типами механических движений — поступательным и вращательным. Материальная точка M, обладающая одной степенью свободы и движущаяся вдоль некоторой линии, может с течением времени сколько угодно удаляться от своего исходного положения; такое движение называется чисто поступательным. В противоположность этому колебательным мы будем называть такое движение, когда точка M не выходит за пределы какого-либо отрезка KL на этой линии и многократно проходит через одни и те же положения внутри KL.

Если, кроме того, существует такой промежуток времени T, что каждый раз спустя время T все движение точки M в точности повторяется, то колебание мы назовем *периодическим*. Промежуток времени T, в конце которого точка оказывается в том же положении и движется с той же скоростью, как и в его начале, называется *периодом колебания*. Простейшим случаем периодического колебания будет так называемое *гармоническое колебательное движение*, к рассмотрению которого мы и перейдем.

Представим себе произвольную точку D, равномерно вращающуюся по окружности радиуса A против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω радианов в секунду (рис. 4.1). Уравнение движения точки D примет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \tag{50.1}$$

где φ — угол поворота подвижного радиуса OD относительно неподвижного OK, а φ_0 — начальное значение угла φ в момент времени $t = 0$.

По мере того как точка D будет вращаться по окружности от K к L и, далее, снова к K, проекция точки D на диаметр LK — точка M — будет двигаться вдоль отрезка KL от одного из его концов к другому и обратно, т. е. будет совершать колебательное движение. Обозначим расстояние OM этой точки от центра через x. Тогда уравнение движения точки M примет вид

$$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{50.2}$$

Выбор начального момента отсчета времени совершенно произволен. Мы можем выбрать этот момент так, что φ_0 будет равно нулю. При этом уравнение гармонического колебания (50.2) примет вид

$$x = A\cos\varphi = A\cos\omega t. \tag{50.3}$$

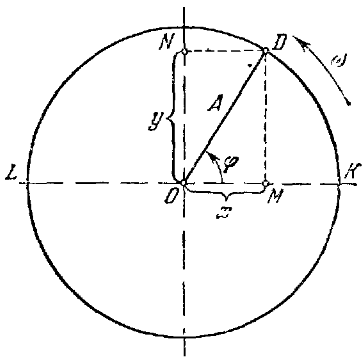

Рис. 4.1.

В дальнейшем воспользуемся тем обстоятельством, что добавка φ_0 в аргумент косинуса не меняет характера движения, а означает лишь изменение начального момента в отсчете времени.

Функция $\cos\omega t$ является простейшей периодической функцией от времени с периодом $T = 2\pi/\omega$. Действительно, спустя промежуток времени T функция $\cos\omega t$ примет значение

$$\cos\omega(t + T) = \cos\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos(\omega t + 2\pi),$$

равное своему первоначальному значению $\cos\omega t$. Таким образом, точка M совершает периодическое колебание. Подобное простейшее периодическое колебание, при котором смещение x меняется со временем по закону косинуса (или синуса, что безразлично, так как одну из этих функций можно перевести в другую изменением φ_0 или, что то же, изменением начального момента времени), называется г а р м о н и ч е с к и м к о л е б а н и е м.

Нетрудно видеть, что проекция точки D на вертикальный диаметр, т. е. точка N на рис. 4.1, также совершает гармоническое колебание по закону

$$y = A\sin\varphi = A\sin\omega t = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{50.4}$$

(Легко сообразить, что гармоническое колебательное движение будет также совершать и проекция точки D на любую прямую, проходящую или не проходящую через O.)

На рис. 4.2 приведен график зависимости x от t по уравнению (50.2). Поскольку $\cos\varphi$ меняется в пределах от $+1$ до -1, то смещение x точки M от центра колебаний O находится в пределах

$$-A \leqslant x \leqslant +A.$$

Максимальная величина этого смещения $|x|_{\text{макс}} = A$ называется амплитудой колебания.

Аргумент $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, стоящий под знаком косинуса и определяющий, таким образом, долю (равную $\cos\varphi$), которую смещение x составляет от максимального, называется фазой колебания или, коротко, фазой.

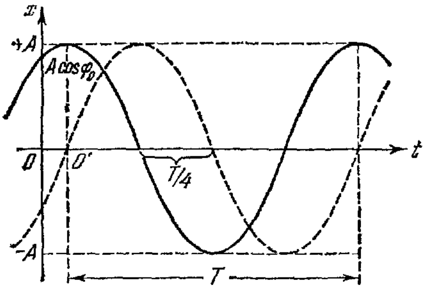

Рис. 4.2.

Величина φ_0 есть соответственно начальная фаза колебания. Сопоставляя (50.4) с (50.3), мы видим, что колебание точки N, изображенное на рис. 4.2 пунктиром, отстает по фазе от колебаний точки M на $\pi/2$, т. е. по времени на четверть периода $T/4$ (поскольку весь период T, как мы видели выше, соответствует изменению фазы на 2π). На графике отмечена точка O' — другое начало отсчета времени t, при котором φ_0 принимает нулевое значение, а уравнение колебания приобретает более простой вид (50.4).

Величина ω, характеризующая угловую скорость вращения точки D, называется угловой частотой гармонического колебания точки M. Она связана с периодом T и обычной частотой ν (числом колебаний за единицу времени)

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{50.5}$$

соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{50.6}$$

В электро- и радиотехнике для измерения частот ν принята единица, носящая название герца (Гц)

1 Гц = 1 колебание в секунду.

При гармоническом колебательном движении смещение точки M меняется со временем по закону (50.3). Дифференцируя это выражение по t, находим скорость движения точки M в любой момент времени:

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin\omega t=\omega A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (50.7)$$

Дифференцируя (50.7) еще раз по t, найдем ускорение колеблющейся точки:

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=$$
$$=-\omega^2 A\cos\omega t=$$
$$=\omega^2 A\cos(\omega t+\pi). \qquad (50.8)$$

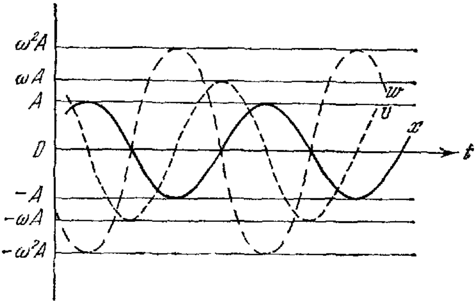

Рис. 4.3.

Мы видим, что скорость и ускорение колеблющейся точки меняются со временем также по гармоническому закону, с той же самой угловой частотой ω и периодом $T=2\pi/\omega$. Амплитуда скорости равна $v_0=\omega A$, а амплитуда ускорения $w_0=\omega^2 A$. Колебания скорости опережают колебания смещения по фазе на $\pi/2$ (или отстают по фазе на $3\pi/2$, что одно и тоже), а колебания ускорения опережают колебания смещения по фазе на π (или отстают на π), как это изображено на рис. 4.3. Подробнее соотношение между этими величинами мы рассмотрим в следующем параграфе, в котором в круг рассматриваемых величин войдут также и силы.

§ 51. Упругие и квазиупругие силы

Выясним, воспользовавшись законами динамики, какими силами вызываются гармонические колебания.

По второму закону динамики сила F, действующая на материальную точку, численно равна произведению массы точки m на ее ускорение w. Подставляя в это соотношение найденное выше выражение w для гармонического колебания, определим значение силы

$$F=mw=-m\omega^2 A\cos\omega t, \qquad (51.1)$$

действующей на точку в каждый момент времени. Сравнивая (51.1) с (50.3), замечаем, что

$$F=-m\omega^2 x=-kx, \quad k=m\omega^2, \qquad (51.2)$$

т. е. сила, вызывающая гармоническое колебание, обладает двумя важными свойствами:

1) *величина силы прямо пропорциональна смещению точки от центра колебания;*