жение по t, находим скорость движения точки M в любой момент времени:

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin\omega t=\omega A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right). \quad (50.7)$$

Дифференцируя (50.7) еще раз по t, найдем ускорение колеблющейся точки:

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=$$
$$=-\omega^2A\cos\omega t=$$
$$=\omega^2A\cos(\omega t+\pi). \quad (50.8)$$

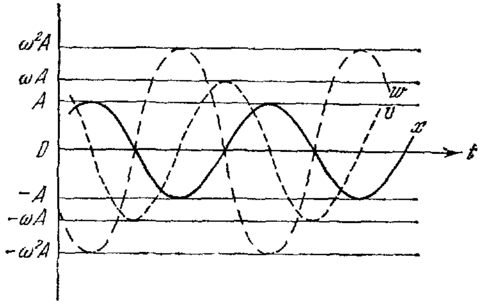

Рис. 4.3.

Мы видим, что скорость и ускорение колеблющейся точки меняются со временем также по гармоническому закону, с той же самой угловой частотой ω и периодом $T=2\pi/\omega$. Амплитуда скорости равна $v_0=\omega A$, а амплитуда ускорения $w_0=\omega^2A$. Колебания скорости опережают колебания смещения по фазе на $\pi/2$ (или отстают по фазе на $3\pi/2$, что одно и тоже), а колебания ускорения опережают колебания смещения по фазе на π (или отстают на π), как это изображено на рис. 4.3. Подробнее соотношение между этими величинами мы рассмотрим в следующем параграфе, в котором в круг рассматриваемых величин войдут также и силы.

§ 51. Упругие и квазиупругие силы

Выясним, воспользовавшись законами динамики, какими силами вызываются гармонические колебания.

По второму закону динамики сила F, действующая на материальную точку, численно равна произведению массы точки m на ее ускорение w. Подставляя в это соотношение найденное выше выражение w для гармонического колебания, определим значение силы

$$F=mw=-m\omega^2A\cos\omega t, \quad (51.1)$$

действующей на точку в каждый момент времени. Сравнивая (51.1) с (50.3), замечаем, что

$$F=-m\omega^2x=-kx, \quad k=m\omega^2, \quad (51.2)$$

т. е. сила, вызывающая гармоническое колебание, обладает двумя важными свойствами:

1) *величина силы прямо пропорциональна смещению точки от центра колебания;*

2) *направление силы противоположно направлению смещения, т. е. сила всегда направлена к центру* (при $x > 0$ $F < 0$, а при $x < 0$ $F > 0$).

Кроме того, из (51.2) следует, что при $x = 0$ и $F = 0$, т. е. в центре колебания O на точку M сила не действует. Иными словами, *центр колебаний является положением равновесия точки M*.

Рассмотрим движение материальной точки массы m под действием упругой пружины (рис. 4.4), массой которой мы пренебрежем. Точка движется вдоль горизонтальной оси x так, что сила тяжести не оказывает влияния на ее движение. Точка O на оси x отвечает положению равновесия материальной точки, т. е. положению, при котором пружина не деформирована (рис. 4.4, *а*).

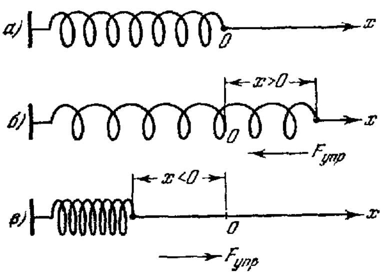

Рис. 4.4.

При смещении точки вправо на величину x (рис. 4.4, *б*) на нее будет действовать сила F упругости растянутой пружины, равная по закону Гука

$$F_{упр} = -kx < 0. \qquad (51.3)$$

Эта сила направлена влево ($F < 0$), т. е. к положению равновесия — точке O.

При смещении материальной точки влево от O на величину x (рис. 4.4, *в*) на нее будет действовать сила

$$F_{упр} = -kx > 0, \qquad (51.4)$$

направленная вправо ($F > 0$), так как $x < 0$.

Следовательно, при любых смещениях от положения равновесия, т. е. от точки O, материальная точка будет находиться под воздействием силы, направленной к O и равной

$$F_{упр} = -kx. \qquad (51.5)$$

Сравнивая (51.2) и (51.5), видим, что материальная точка m, будучи выведена из состояния равновесия, начнет совершать гармонические колебания.

Коэффициент k есть коэффициент упругости, или жесткость пружины. Численно он равен силе, которую нужно приложить к пружине, чтобы растянуть (или сжать) пружину на единицу длины.

Частоту колебаний материальной точки m под действием пружины (массой которой мы пренебрегаем) с коэффициентом упругости k можно получить из (51.2) и (51.5):

$$m\omega^2 = k,$$

т. е.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (51.6)$$

что отвечает периоду T, равному

$$T=\frac{1}{\nu}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (51.7)$$

Частота и период не зависят от амплитуды колебаний и определяются только величинами m и k. *Амплитуда и фаза колебания* (или начальная фаза φ_0) *определяются из начальных условий*, при которых возникло движение.

Аналогичное гармоническое движение возникает и при движении груза m, подвешенного на пружине (см. рис. 1.19). Отличие от рассмотренного выше случая состоит в том, что положение равновесия будет иметь место при несколько растянутой пружине. Упругая сила растяжения в положении равновесия в точности равна силе тяжести и, будучи направлена вверх, уравновешивает ее.

Чтобы материальная точка m совершала гармоническое колебательное движение, не обязательно, чтобы на нее действовали именно упругие силы. Достаточно, чтобы сила при смещении от положения равновесия менялась согласно закону (51.2):

$$F=-kx.$$

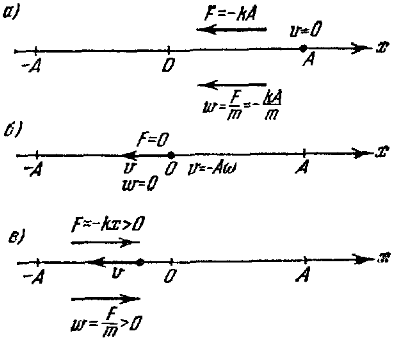

Рис. 4.5.

Если сила, не являющаяся по своей природе упругой, подчиняется закону (51.2), то она называется «к в а з и у п р у г о й силой» (по-латыни «quasi» означает «как бы»).

Рассмотрим теперь движение материальной точки под действием квазиупругой силы (рис. 4.5) детальнее. Пусть в начальный момент материальная точка смещена в положение A и скорость ее равна нулю (рис. 4.5, *а*):

$$x=A\cos\omega t\,|_{t=0}=A,$$
$$v=-\omega A\sin\omega t\,|_{t=0}=0,$$
$$w=-\omega^2 A\cos\omega t\,|_{t=0}=-\omega^2 A.$$

В этом положении на точку действует квазиупругая сила F, равная

$$F=-kA=-m\omega^2 A$$

и направленная влево. Под действием этой силы точка m будет двигаться влево с ускорением

$$w=\frac{F}{m}=-\omega^2 A.$$

В течение первой четверти периода ($0 < t < T/4$) будет происходить ускоренное движение точки от A к O. Скорость ее будет возрастать по величине вплоть до точки O, достигая в ней значения:

$$v = -\omega A \sin \omega t \,\Big|_{t=\frac{T}{4}} = -\omega A \sin \omega \frac{2\pi}{4\omega} = -\omega A \sin \frac{\pi}{2} = -\omega A = -v_0$$

при

$$x = A \cos \omega t \,\Big|_{t=\frac{T}{4}} = A \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

В точке O сила и ускорение обращаются в нуль (рис. 4.5, *б*), а затем, после ее прохождения, меняют знак. В течение второй четверти периода, т. е. в пределах

$$\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2},$$

материальная точка движется влево ($v < 0$) от O к $-A$ под действием силы, направленной вправо ($F > 0$) (рис. 4.5, *в*). Движение происходит замедленно, и в точке $x = -A$ материальная точка останавливается с тем, чтобы двинуться от $x = -A$ к $x = 0$ и, далее, к $x = +A$. Это движение происходит так же, как и разобранное выше движение от $x = A$ к $x = 0$ и $x = -A$, а затем весь цикл повторяется.

Таким образом, при движении m от крайних точек к O скорость и сила (ускорение) параллельны и скорость возрастает, достигая наибольшего значения в положении равновесия. При удалении от точки равновесия скорость и сила (ускорение) направлены противоположно, движение происходит замедленно и скорость обращается в нуль в крайних точках.

Эта физическая картина количественно описывается формулами § 50. Сдвиг фаз между координатой x и скоростью v на $\pi/2$ отвечает тому, что при $x = 0$ скорость v достигает максимума и, наоборот, при $|x|_{\text{макс}}$ скорость обращается в нуль. Сдвиг фаз между координатой x и ускорением w на π означает, что координата и ускорение всегда имеют противоположные знаки.

Гармоническое колебательное движение играет исключительно большую роль в природе и технике. Поэтому следует хорошо представлять себе все этапы этого движения, описанные выше, смысл фазовых отношений координат, скоростей и ускорений (сил).

Рассмотрим примеры гармонического колебательного движения под действием квазиупругих сил.

П р и м е р 1. К о л е б а н и я м а я т н и к а. Маятник стенных часов представляет собой тяжелый груз, который укреплен на длинном тонком стержне, подвешенном шарнирно на горизонтальной оси C, перпендикулярной к стержню (рис. 4.6). На маятник действует сила веса $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, приложенная в центре его тяжести O, и реакция опоры на оси. Отклоним маятник на некоторый угол φ от вертикали. Тогда на него будет действовать момент внешней силы относительно оси вращения (момент реакции опоры, проходящей через эту ось, равен нулю)

$$M = -mgl \sin\varphi, \tag{51.8}$$

где l — расстояние от центра тяжести до оси вращения. Знак минус показывает, что этот момент направлен в сторону уменьшения угла поворота φ.

Под действием приложенного момента маятник начнет вращаться с переменной угловой скоростью $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ и угловым ускорением $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Обозначив момент инерции маятника относительно оси вращения через I, можно записать второй закон динамики вращательного движения (11.16) в виде

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin\varphi. \tag{51.9}$$

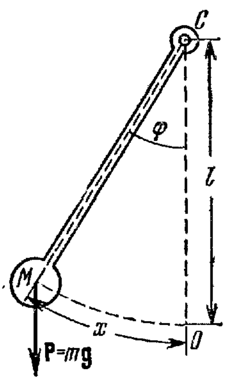

Рис. 4.6.

Центр тяжести маятника движется по дуге окружности постоянного радиуса, и смещение его от положения равновесия $x = l\varphi$. Переходя к переменной x и умножая обе части равенства на ml/I, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m^2gl^2}{I}\sin\left(\frac{x}{l}\right). \tag{51.10}$$

Для малых углов отклонения от вертикали, не превышающих 5—6°, с достаточной степенью точности можно заменить $\sin\varphi$ самим углом φ (в радианах $\varphi = x/l$). Тогда уравнение движения центра тяжести (51.10) перепишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m^2gl}{I}x. \tag{51.11}$$

Это уравнение эквивалентно уравнению движения материальной точки массы m, движущейся под действием квазиупругой силы

$$F_{\text{кв-упр}} = -\frac{m^2gl}{I}x, \tag{51.12}$$

с коэффициентом пропорциональности $k = m^2gl/I$ (см. (51.5)). Следовательно, центр тяжести маятника будет двигаться по дуге окружности, совершая гармоническое колебание с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \tag{51.13}$$

Амплитуда этого колебания A и начальная фаза φ_0 будут зависеть от начального смещения и начальной скорости. В идеализированном случае, когда можно пренебречь массой стержня и считать, что масса груза сосредоточена в центре его тяжести, момент инерции системы относительно оси вращения равен $I = ml^2$. Период колебаний такого, так называемого математического, маятника

$$T_{\text{ид}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{51.14}$$

не зависит от его массы. Чтобы выразить в таком же виде зависимость периода колебаний реального, или физического, маятника от его параметров, вводят приведенную (эквивалентную) длину последнего

$$l_э = \frac{I}{ml}. \tag{51.15}$$

Из (51.15) можно определить приведенную длину секундного маятника, т. е. маятника, время качания которого $T/2$ составляет 1 с в данной точке земного шара. И наоборот, зная эквивалентную длину данного маятника $l_э$ и перенося его с места на место, можно определять величину ускорения поля земного тяготения. Поскольку Земля является не точным шаром, а эллипсоидом, несколько сплюснутым у полюсов, и, кроме того, на тела действуют центробежные силы, особенно заметные на экваторе, то величина g зависит от географической широты и на полюсе несколько больше, чем на экваторе, как это видно из приводимой ниже таблицы.

Положение точки	Географическая широта, °	Ускорение земного тяготения, м/с²
Полюс . . .	90	9,83219
Москва . . .	53	9,81558
Экватор . .	0	9,78049

Таким образом, если перенести на полюс стенные часы, выверенные на экваторе, то период колебаний маятника уменьшится и часы начнут уходить вперед на 3,8 минуты за сутки. Чтобы эти часы на полюсе шли верно, придется увеличить $l_э$, т. е. передвинуть груз маятника вдоль стержня дальше от оси. Подобным передвижением груза следует регулировать ход часов с маятником и в других случаях. Если часы отстают, то надо передвигать груз ближе к оси, и наоборот.

Пример 2. Вертикальные колебания корабля. Плавающий корабль погружается в воду до уровня, при котором по закону Архимеда вес вытесненной им воды равен весу корабля с грузом (рис. 4.7, *а*). Если по каким-либо внешним причинам, например при волнах, корабль случайно погрузится глубже на величину x (рис. 4.7, *б*), то подъемная сила увеличится и корабль будет выталкиваться к поверхности. Избыточная сила F_x, действующая на погруженный корабль, будет равна весу воды в объеме, заштрихованном на рис. 4.7, *б*. Обозначая плотность воды через ρ, получаем:

$$F_x = -g\rho S x, \qquad (51.16)$$

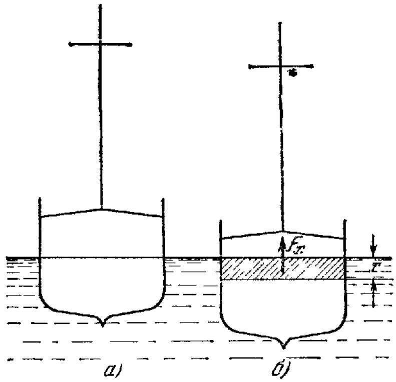

Рис. 4.7.

где S — площадь горизонтального сечения корабля на уровне воды. Сравнивая (51.16) и (51.5), видим, что на погруженный корабль действует квазиупругая сила с коэффициентом $k = g\rho S$, и, следовательно, он будет совершать вертикальные гармонические колебания по закону (50.4) с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g\rho S}}, \qquad (51.17)$$

где m — масса корабля. Для грузового судна водоизмещением 10 000 т и площадью горизонтального сечения на уровне ватерлинии $S = 1000$ м^2 период вертикальных колебаний составит $T \approx 6$ с.

§ 52. Энергия гармонических колебаний

При гармоническом колебательном движении кинетическая энергия колеблющейся материальной точки непрерывно меняется. Меняется и потенциальная энергия взаимодействия между точкой и окружающими телами, приводящего к появлению квазиупругих сил.

Это есть энергия не самой материальной точки (например, это — энергия деформированной пружины или энергия взаимодействия маятник — Земля). Однако для нас это обстоятельство не существенно. Мы можем не интересоваться природой возникновения сил взаимодействия, зная, что сила квазиупруга, и зная коэффициент k. Как сила, так и потенциальная энергия при этом определяются положением колеблющейся точки m, т. е. ее координатой x.

Поэтому мы будем в дальнейшем как кинетическую, так и потенциальную энергию относить к самой колеблющейся материальной точке m.