§ 54. Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс

В условиях, когда на тело действует только одна квазиупругая сила, оно будет совершать незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой $A = \text{const}$. На реально же движущиеся тела всегда будут воздействовать со стороны окружающей среды силы трения, препятствующие их движению. На преодоление сопротивления среды, на трение в опорах, на создание волн, на возникновение неупругих деформаций и т. п. будет затрачиваться энергия. Вследствие этого механическая энергия колеблющегося тела будет непрерывно уменьшаться, переходя в другие формы энергии и рассеиваясь в окружающую среду. Согласно (52.4) с уменьшением энергии колебания будет уменьшаться его амплитуда и колебание станет затухающим.

Полная сила F, действующая на колеблющуюся точку, будет тогда суммой квазиупругой силы $F_{\text{кв-упр}}$ и силы трения $F_{\text{тр}}$. При малых скоростях движения сопротивление обычно пропорционально первой степени скорости и направлено противоположно ей, т. е.

$$F_{\text{тр}} = -rv, \tag{54.1}$$

где r — коэффициент трения, зависящий от свойств среды, формы и размеров движущегося тела.

Чтобы решить задачу о колебательном движении при наличии трения, мы вернемся к уже разобранной задаче о гармоническом колебательном движении и найдем строгое математическое ее решение.

Заменяя во втором закоие динамики ускорение w второй производной от смещения по времени, мы получим **основное дифференциальное уравнение движения** (одномерного!):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F. \tag{54.2}$$

При наличии одной только квазиупругой силы $F_{\text{кв-упр}} = -kx$ это уравнение примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{54.3}$$

Это и есть дифференциальное уравнение движения материальной точки массы m под действием квазиупругой силы с коэффициентом «жесткости» k.

Неизвестная функция $x(t)$, характеризующая движение точки под действием квазиупругой силы, входит в уравнение (54.3) сама и под знаком второй производной. Для решения этого дифференциального уравнения вспомним, что функциями, которые при двукратном дифференцировании превращаются сами в себя с обратным знаком, являются синус и косинус (илн показательная функция с чисто мнимым показателем степени). Будем искать решение уравнения (54.3) в виде

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{54.4}$$

с произвольными значениями постоянных A, φ_0 и ω. Введением начальной фазы φ_0 мы объединяем синус и косинус в одну функцию, поскольку они отличаются друг от друга только значением этой начальной фазы. Выполняя двукратное дифференцирование выражения (54.4) по t и подставляя найденные значения x и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в уравнение (54.3), получаем:

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -kA\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Поскольку обе части этого равенства можно сократить на $A\cos(\omega t + \varphi_0)$, то, следовательно, оно выполняется при произвольных значениях величин A и φ_0. Эти постоянные A и φ_0 могут быть любыми, *в зависимости от начальных условий движения*, а угловая частота ω равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{54.5}$$

в соответствии с тем, что было получено раньше.

Таким образом, мы математически доказали высказанное в § 51 утверждение, что если на материальную точку действует квазиупругая сила, то эта точка будет совершать гармоническое колебательное движение по закону (54.4) с угловой частотой, определяемой соотношением (54.5).

Разберем теперь аналогичным методом затухающие колебания при наличии сил трения. Подставляя в (54.2) полное выражение для силы $F = F_{\text{кв-упр}} + F_{\text{тр}} = -kx - rv = -kx - r\frac{dx}{dt}$, получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx,$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{54.6}$$

— дифференциальное уравнение движения материальной точки массы m под действием квазиупругой силы и силы трения.

Не касаясь общих методов решения дифференциальных уравнений, отметим, что в случае уравнения (54.6) искомая функция $x(t)$ должна обладать следующим свойством: как первая, так и вторая производная по времени от $x(t)$ должны отличаться от самой функции $x(t)$ лишь численными множителями. Такой функцией в самом общем случае является показательная функция с комплексным показателем степени или, что то же, произведение показательной функции на синус или косинус. Поэтому будем искать решение дифференциального уравнения (54.6) в виде

$$x = A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{54.7}$$

с произвольными значениями постоянных A_0, φ_0, ω и α. Вычисляя первую и вторую производные от выражения (54.7) и подставляя найденные значения x, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в (54.6), получим, собирая члены суммы, содержащие общие множители:

$$A_0 e^{-\alpha t} \{[m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k] \cos(\omega t + \varphi_0) + \\ + [m2\alpha\omega - r\omega] \sin(\omega t + \varphi_0)\} = 0.$$

Множители $A_0 e^{\alpha t}$ здесь можно сократить, так как A_0 — постоянная, а $e^{-\alpha t}$ ни при каком конечном значении t не обращается в нуль. Оставшееся выражение будет равно нулю при любых значениях t, если порознь будут равны нулю коэффициенты при $\cos(\omega t + \varphi_0)$ и $\sin(\omega t + \varphi_0)$. Действительно, с изменением t в некоторый момент времени, например t', функция $\sin(\omega t' + \varphi_0)$ обратится в нуль. При этом $\cos(\omega t' + \varphi_0)$ будет равен ± 1. Следовательно, это равенство будет удовлетворяться, если коэффициент при $\cos(\omega t' + \varphi_0)$ равен нулю. Аналогично доказывается необходимость равенства нулю множителя при $\sin(\omega t + \varphi_0)$. Таким образом, получаем два уравнения для нахождения α и ω:

$$\left.\begin{aligned} m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k = 0, \\ m2\alpha\omega - r\omega = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\alpha = \frac{r}{2m} \tag{54.8}$$

и

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \tag{54.9}$$

Постоянные A_0 и φ_0, как и в предыдущем примере, могут быть любыми, в зависимости от начальных условий движения.

Выражение (54.7), в котором значения α и ω определены из (54.8) и (54.9), является общим решением уравнения затухающих колебаний (54.6). Оно отличается от чисто гармонического колебания (54.4) тем, что амплитуда колебания

$$A(t) = A_0 e^{-\alpha t} \tag{54.10}$$

является убывающей функцией времени. На рис. 4.15 представлен график зависимости x от t для затухающих колебаний, аналитически описываемых (54.7). Пунктиром на этом рисунке изображена зависимость (54.10) амплитуды от времени, а сплошной линией — полная зависимость (54.7). Чем больше коэффициент трения r, тем больше величина α в показателе степени и тем быстрее амплитуда затухающих колебаний убывает со временем. Напротив, при полном отсутствии трения, когда $r = 0$, то $\alpha = 0$, $e^{-\alpha t} = e^0 = 1$, $x = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, и мы придем к уже рассмотренному случаю чисто гармонических колебаний с угловой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

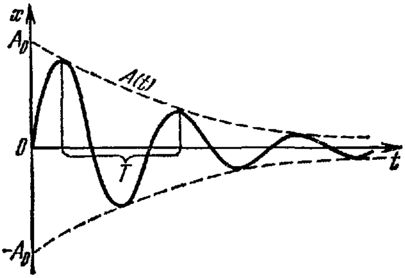

Рис. 4.15.

При наличии трения не только убывает со временем амплитуда колебания, но и уменьшается угловая частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \qquad (54.11)$$

где ω_0 — угловая частота собственных колебаний точки при отсутствии трения.

Соответственно период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \qquad (54.12)$$

С увеличением трения период колебаний возрастает, и при $\alpha = \omega_0$ период становится бесконечным: $T = \infty$. При дальнейшем увеличении α период T становится мнимым, а движение точки — *апериодическим*, как это изображено на рис. 4.16.

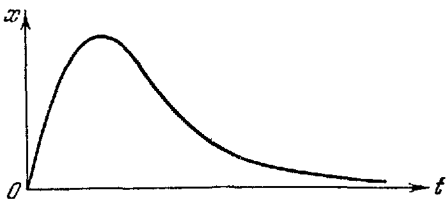

Рис. 4.16.

Сопоставим при $\alpha < \omega_0$ значения амплитуды в два соседние момента времени, отличающиеся друг от друга на один период, т. е. $A(t) = A_0 e^{-\alpha t}$ и $A(t + T) = A_0 e^{-\alpha(t+T)}$, и разделим первое из этих значений на второе. Тогда получим:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\alpha T} = \text{const}, \qquad (54.13)$$

т. е. *амплитуда затухающих колебаний за каждый период убывает в одно и то же число раз.* Натуральный логарифм этого отношения

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \alpha T = d \qquad (54.14)$$

носит название логарифмического декремента затухания.

Материальная точка, на которую действует квазиупругая сила, будучи выведена из положения равновесия $x = 0$, начнет совершать колебания около этого положения. Из-за наличия сил трения подобные собственные, или, как их иногда называют, свободные колебания точки всегда будут затухающими.

Для получения незатухающих колебаний необходимо воздействие дополнительной переменной внешней силы, которая подталкивала бы точку то в одну, то в другую сторону и работа которой непрерывно восполняла бы убыль энергии, затрачиваемой на преодоление трения. Подобная переменная сила называется вынуждающей ($F_{\text{вын}}$), а возникающие под ее действием незатухающие колебания — вынужденными.

Разберем простейший случай вынуждающей силы, меняющейся по закону синуса или косинуса, т. е. положим

$$F_{\text{вын}} = F_0 \cos(\Omega t). \tag{54.15}$$

Здесь F_0 есть амплитуда вынуждающей силы, т. е. максимальное возможное ее значение, а Ω — угловая частота колебаний вынуждающей силы. Полная сила, действующая на колеблющуюся точку, будет алгебраической суммой квазиупругой силы, силы трения и вынуждающей силы, и дифференциальное уравнение движения (54.2) примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\Omega t). \tag{54.16}$$

Как известно из курса высшей математики, решение этого уравнения,

$$x(t) = x_{\text{своб}}(t) + x_{\text{вын}}(t), \tag{54.17}$$

представляет собой сумму свободных колебаний $x_{\text{своб}}(t)$ и вынужденных колебаний $x_{\text{вын}}(t)$. Свободные колебания будут происходить с собственной угловой частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$ и в конце концов затухнут по закону (54.7). Что же касается вынужденных колебаний, то их частота должна, очевидно, совпадать с частотой вынуждающей силы. Амплитуда этих колебаний должна быть постоянной, поскольку амплитуда вынуждающей силы не меняется со временем.

Поэтому, пренебрегая собственными колебаниями системы, играющими существенную роль лишь в начале процесса, мы будем искать решение уравнения (54.16) в виде

$$x = x_{\text{вын}}(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \tag{54.18}$$

с неизвестными заранее амплитудой A и сдвигом фазы Φ.

Продифференцируем выражение (54.18) дважды по времени и подставим найденные значения x, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в дифференциальное уравнение (54.16). Воспользовавшись известными тригонометрическими тождествами для синуса и косинуса суммы, получим:

$$-m\Omega^2 A\,[\cos\Omega t\cos\Phi-\sin\Omega t\sin\Phi]=$$
$$=-kA\,[\cos\Omega t\cos\Phi-\sin\Omega t\sin\Phi]+$$
$$+r\Omega A\,[\cos\Omega t\sin\Phi+\sin\Omega t\cos\Phi]+F_0\cos\Omega t.$$

Приравнивая друг другу коэффициенты, стоящие в обеих частях равенства при синусе и соответственно при косинусе Ωt, получаем два уравнения, из которых находятся искомые величины:

$$A=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\Omega^2)^2+r^2\Omega^2}},\tag{54.19}$$

$$\operatorname{tg}\Phi=-\frac{r\Omega}{k-m\Omega^2}.\tag{54.20}$$

Следует ясно представлять себе различие между решениями $x_{своб}(t)$ и $x_{вын}(t)$. Функция $x_{своб}(t)$ содержит две произвольные постоянные A_0 и φ_0, которые определяются из добавочных условий, например начальных условий движения. Функция же $x_{вын}(t)$ не содержит произвольных постоянных. Все входящие в нее величины определяются из самого дифференциального уравнения движения. Поэтому $x_{вын}(t)$ не зависит от начальных условий движения. Это значит, что когда в силу затухания $x_{своб}$ обратится в нуль, колебательное движение будет определяться только свойствами колеблющейся системы и амплитудой и частотой вынуждающей силы.

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы (54.15) возникают гармонические вынужденные колебания (54.18) с той же частотой Ω. Амплитуда вынужденных колебаний согласно (54.19) прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_0, зависит от характеристик свободно колеблющейся точки m, k и r и, кроме того, является функцией угловой частоты колебаний вынуждающей силы Ω. Графики зависимости A и сдвига фаз Φ от Ω (для нескольких значений r) представлены на рис. 4.17, *а* и *б*.

Как видно из этих графиков, характер этих зависимостей существенно различен в трех областях изменения угловой частоты Ω.

1. Область малых частот:

$$\Omega\ll\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega_0.\tag{54.21}$$

В этой области сдвиг фаз Φ близок к нулю, а выражение для амплитуды, используя формулы (54.8) и (54.19), можно

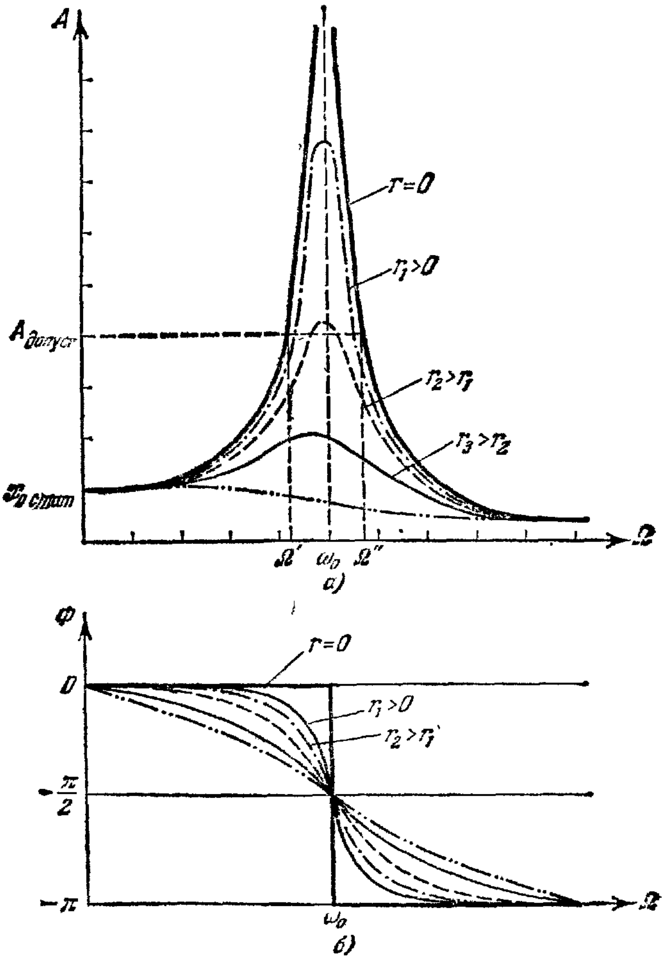

Рис. 4.17.

предварительно преобразовать к виду

$$A=\frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega_0^4}}}=\frac{x_{0\,\text{стат}}}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (54.22)$$

В предельном случае, когда $\Omega=0$ (при постоянной нагрузке), $A=F_0/k=x_{0\,\text{стат}}$, где $x_{0\,\text{стат}}$ — статическое смещение точки под действием постоянной силы $F = F_0$. При $0 < \Omega \leqslant \omega_0$ и малом трении ($\alpha \leqslant \omega_0$) приближенно получаем:

$$x \approx \frac{F_0}{k} \cos \Omega t = \frac{F}{k}, \tag{54.23}$$

т. е. смещение колеблющейся точки почти без искажений следует за изменением вынуждающей силы. Этот случай представляет практический интерес для измерительной техники. Различные самопишущие приборы для регистрации быстропеременных усилий (например, мембранный индикатор, записывающий давление в быстроходном двигателе) представляют собой системы, на которые действуют упругие или квазиупругие силы, возвращающие систему в положение равновесия после снятия нагрузки. Переменное усилие является для такой системы вынуждающей силой со своей характерной угловой частотой Ω (или несколькими угловыми частотами Ω_i). Чтобы вынужденные колебания прибора успевали следовать за изменениями вынуждающей силы, должно выполняться неравенство (54.21), т. е. собственная частота колебаний прибора ω_0 должна быть во много раз больше частоты изменения измеряемой величины Ω. При $\omega_0 > 10\Omega$ ошибка измерений не будет превышать 1—2%. Увеличение собственной частоты ω_0 достигается как за счет увеличения жесткости измерительной системы k, так и за счет уменьшения ее массы m [из (54.20) следует, что с ростом k и уменьшением m величина $\operatorname{tg} \Phi \to 0$, а следовательно, и сдвиг фаз $\Phi \to 0$].

2. Область высоких частот:

$$\Omega \gg \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0. \tag{54.24}$$

При таких частотах $\Phi \approx -\pi$ и колебания точки происходят в фазе, противоположной колебаниям вынуждающей силы. Когда смещение положительно, вынуждающая сила отрицательна, и наоборот. Вследствие этого амплитуда вынужденных колебаний не может быть большой и убывает с ростом частоты вынуждающей силы по закону

$$A \approx x_{0\,\text{стат}} \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2. \tag{54.25}$$

Подобный случай также имеет важное практическое значение. Например, для предотвращения воздействия качки корабля на различные приборы их следует подвешивать на сравнительно мягких пружинах и максимально утяжелять. Если при этом частота собственных колебаний системы ω_0 будет сделана много меньше частоты качки Ω, то согласно (54.25) амплитуда колебаний подвешенного прибора будет много меньше амплитуды колебания точки подвеса.

3. Область р е з о н а н с а:

$$\Omega \approx \omega_0. \tag{54.26}$$

При частотах колебания вынуждающей силы, близких к частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний сильно возрастает и начинает во много раз превышать статическое смещение:

$$A_{\text{резон}} \approx x_{0\,\text{стат}} \frac{\omega_0}{2\alpha}. \qquad (54.27)$$

Чем меньше коэффициент трения, тем больше эта амплитуда. В пределе, $A_{\text{резон}} \to \infty$ при $r \to 0$. Это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при $\Omega \approx \omega_0$ носит название механического резонанса.

Явления резонанса, как вредные, так и полезные, широко распространены в природе и технике. Когда войсковая часть идет по мосту, то обязательно подается команда идти «не в ногу». Периодические толчки, создаваемые строем солдат при ходьбе «в ногу», могут попасть в резонанс с собственными колебаниями моста и привести к его разрушению. Маломощный двигатель, если он плохо уравновешен и при вращении «бьет», может в случае резонанса разрушить или сильно повредить сооружение, на котором он укреплен, и т. п.

При запуске в ход машины вибрация ее деталей будет зависеть от частоты вращения машины. Обозначим через $A_{\text{допуст}}$ максимальную амплитуду, которая допустима при вибрации данной детали без опасности ее поломки.

Из рис. 4.17, *а* видно, что при пренебрежимо малом трении ($r \approx 0$) в некоторой области частот Ω, заключенной в пределах

$$\Omega' < \Omega < \Omega'',$$

амплитуда колебаний детали становится очень большой и превышает $A_{\text{допуст}}$, что грозит аварией машины.

Чем больше трение, тем уже опасная полоса частот, и при достаточно большом трении $r > r_2$ вся область частот безопасна для работы машины.

Однако добиваться снижения амплитуды вынужденных колебаний машины, увеличивая трение, было бы нелепо. Это не означает, с другой стороны, что машина должна работать всегда в области малых частот

$$\Omega < \Omega'.$$

Следует твердо помнить, что движение

$$x = x_{\text{вын}}(t)$$

устанавливается лишь спустя достаточно большой промежуток времени (по сравнению с периодом колебания T) после изменения характера движения, когда $x_{\text{своб}}$ вследствие наличия трения затухает. Затухание же тем меньше, чем меньше трение. Следовательно, и при изменении режима работы машины амплитуда вынужденных колебаний устанавливается не сразу. Это означает, что опасная зона частот от Ω' до Ω'' может быть пройдена, если ускорение хода машины (или замедление) не слишком мало. Не следует лишь задерживаться в этой опасной для машины области частот.

С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если частота их совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Вся прикладная акустика и радиотехника, аппараты, воспринимающие звуковые и электрические колебания, основаны на явлениях резонанса.

Возможность поддерживать незатухающие колебания представляет чрезвычайный интерес для техники. Особенно важными и широко применяемыми являются колебательные движения, возникающие и поддерживающиеся за счет постоянного, неколебательного источника энергии. Такие системы называются **автоколебательными**. Теория автоколебаний разрабатывалась главным образом советскими учеными (Мандельштам, Папалекси, Андронов, Хайкин, Теодорчик, Харкевич и др.). В качестве примеров автоколебательных систем можно привести: часы, в которых постоянные колебания маятника поддерживаются за счет энергии спиральной пружины или поднятого груза; радиопередатчик, энергия колебаний которого поддерживается за счет энергии аккумуляторных батарей; электрический звонок, пневматический молоток и многие другие приборы.

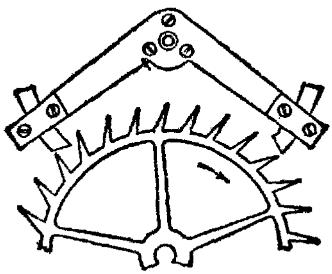

Рис. 4.18.

Чтобы колебательное движение не затухало, к колеблющейся системе необходимо подводить энергию для компенсации ее потерь в процессе колебаний. Подвод энергии осуществляется в виде «толчков» в подходящие моменты времени. Толчок должен ускорить, а не замедлить колебание. В автоколебательной системе включение источника энергии для получения нужного толчка производится самой системой, что гарантирует получение толчков в нужные моменты времени.

Рассмотрим, например, работу простейших стенных часов, в которых энергия груза тратится на поддержание колебаний маятника, расходующего свою энергию на трение.

Существуют различные конструкции (так называемые «ходы»), связывающие механизм часов и маятник. В наиболее распространенном «анкерном ходе» механизм часов и маятник связаны с помощью системы зубчатых колес. Над одним из зубчатых колес (рис. 4.18) находится рычаг — «якорь», к которому прикреплены два зуба специальной формы — «палетты». Якорь укреплен на оси маятника и качается вместе с ним.

При качании маятника палетты по очереди то опускаются, заходя между зубьями шестерни, то поднимаются. При подъеме очередной палетты, когда срез ее соскальзывает с конца зуба шестерни, шестерня под действием пружины поворачивается, и кончик зуба, скользя по нижней, косо срезанной поверхности палетты, подталкивает ее, а вместе с ней — якорь и маятник. В это время противоположная палетта опускается между зубьями, позволяя повернуться шестерне лишь на один зуб. Таким образом, маятник получает непрерывные толчки, поддерживающие его незатухающие колебания. В свою очередь скорость вращения зубчатого колеса, а вместе с ним и всего механизма часов определяется периодом колебания маятника.

Советским ученым принадлежит открытие нового типа резонанса, получившего название п а р а м е т р и ч е с к о г о р е з о н а н с а.

Представим себе, что одна из физических величин («параметров»), определяющая свойства колебательной системы, сама периодически меняется. Таким параметром в случаях маятника или качелей может быть расстояние от оси колебаний до центра инерции системы.

При наличии малых колебаний системы периодическое изменение такого параметра может, при соответствующей частоте, привести к значительному усилению колебаний — это и есть параметрический резонанс.

Если качели совершают малые колебания, то эти колебания можно усилить, поднимаясь и приседая в «такт», т. е. меняя положение центра инерции системы относительно оси колебаний.