

Математическое выражение этого эффекта в случае движения вдоль одной прямой дается формулой (57.5).

Заметим, что хотя явление Допплера наблюдается и в оптике, но там оно имеет совершенно иную природу. В случае световых

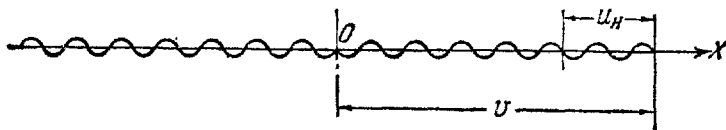


Рис. 4.26.

волн среда — носитель колебаний — отсутствует, световые волны материальны сами по себе. В этом случае нельзя, следовательно, вводить скорость источника и скорость наблюдателя (по отношению к среде) — эффект зависит только от их относительной скорости. К этому вопросу мы вернемся в томе III.

§ 58. Интерференция волн

Если через данную область пространства распространяется одновременно несколько волн, то колебания любой точки среды, вызванные каждой волной в отдельности, будут складываться друг с другом по правилам сложения колебаний, рассмотренным в § 53.

Это обстоятельство отнюдь не является очевидным и в ряде случаев может не иметь места. В § 53 рассматривалось движение изолированной материальной точки, для которой результирующее колебание равно сумме отдельных колебаний, в которых она участвует. Сейчас же речь идет о непрерывной упругой среде, все точки которой взаимосвязаны.

Напомним механизм возникновения колебаний любой частицы упругой среды. Эта частица приходит в движение в результате возникающих напряжений, вызванных деформацией среды (сжатием при продольной волне, сдвигом — при поперечной). Если складывающиеся колебания обладают малой амплитудой, то согласно закону Гука напряжения будут пропорциональны деформациям. Результирующее напряжение в этом случае будет равно сумме составляющих его, а результирующее колебание частицы среды будет равно сумме колебаний, вызванных отдельными волнами.

При больших амплитудах колебаний закон Гука уже не выполняется. Результирующее напряжение приводит к колебаниям, которые отличны от суммы колебаний, вызванных отдельными волнами. Подобные колебания имеют место при распространении так называемых ударных волн, возникающих при взрывах. Скорость ударных волн превышает скорость обычных волн и тем больше, чем больше их амплитуда.

Мы ограничимся здесь рассмотрением волн малой амплитуды. В этом случае *колебание каждой точки среды является суммой независимых колебаний, вызванных каждой из проходящих через данную точку волн в отдельности.* Другими словами, независимые волны, которые в процессе своего распространения одновременно проходят через одну и ту же точку среды, складываются, *но друг друга не искажают.* Перекрещивающиеся волны, разойдясь, не несут на себе никаких следов происшедшего наложения.

Если это имеет место, то принято говорить, что при наложении волн удовлетворяется **п р и н ц и п с у п е р п о з и ц и и.**

Принцип суперпозиции фактически впервые был сформулирован известным итальянским ученым эпохи Возрождения Леонардо да Винчи. Простейшей иллюстрацией его является независимое распространение волн по поверхности воды от двух брошенных камешков, изображенное на рис. 4.27. Обе волны в результате наложения не изменились (что не имело бы места в случае ударных волн).

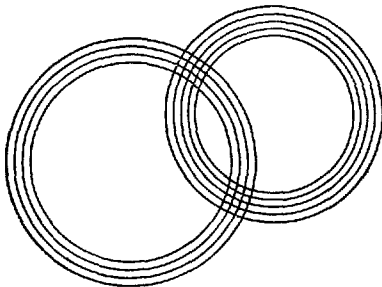


Рис. 4.27.

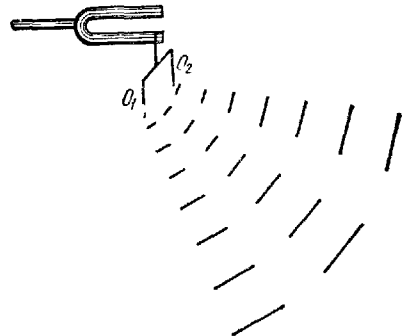


Рис. 4.28.

Принцип суперпозиции и вычисленные нами в предыдущем параграфе выражения для скоростей распространения волн выполняются в точности лишь для волн бесконечно малой амплитуды. Для волн конечной амплитуды все эти соотношения являются лишь некоторым приближением к действительности, тем лучшим, чем меньше их амплитуда.

Ниже мы будем рассматривать только простейший случай синусоидальных волн очень малой амплитуды, подчиняющихся принципу суперпозиции.

Если частоты колебаний двух волн одинаковы и разность фаз не меняется со временем, то такие волны называются **к о г е р е н т н ы м и.** В результате суперпозиции (наложения) когерентных волн наблюдается явление, носящее название **и н т е р ф е р е н ц и и в о л н.** Для простоты рассмотрим суперпозицию когерентных волн на поверхности воды.

Когерентные волны можно получить, если источники волн связаны и совершают колебания совместно, например, если волны вызываются двумя стерженьками, погруженными в воду в точках O_1 и O_2 и прикрепленными к одной из ножек камертона (рис. 4.28).

Рассмотрим результирующее колебание в фиксированной точке M (рис. 4.29). Обозначим расстояние O_1M через x_1 и O_2M — через x_2 . В рассматриваемом случае не только частоты, но и начальные фазы обоих источников волн совпадают; мы положим начальные фазы равными нулю.

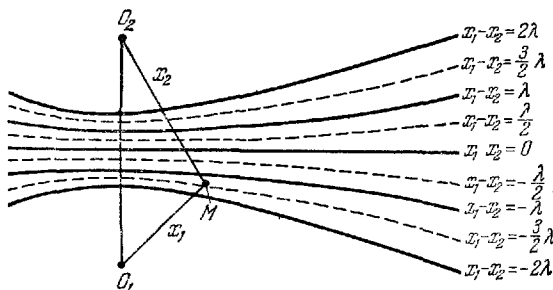


Рис. 4.29.

Согласно (55.8) колебание y_1 , вызванное первой волной в точке M , будет равно

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right), \quad (58.1)$$

и, аналогично, колебание y_2 , вызванное в этой же точке второй волной, составит:

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right), \quad (58.2)$$

где через A_1 и A_2 обозначены амплитуды обеих волн в точке M .

Рассмотрим важный для дальнейших разделов нашего курса случай, когда источники O_1 и O_2 имеют одинаковую мощность. В этом случае амплитуды обеих волн будут практически одинаковы, если x_1 и x_2 не очень отличаются друг от друга:

$$A_1 = A_2 = A. \quad (58.3)$$

Результирующее колебание y в точке M будет равно сумме двух колебаний, вызванных обеими волнами (так как оба колебания направлены одинаково). Как следует из (58.1), (58.2), (58.3), эти колебания будут отличаться лишь фазами φ_1 и φ_2 приходящих в точку M волн, поскольку эти фазы зависят от расстояний x_1 и x_2 :

$$\varphi_1 = -2\pi \frac{x_1}{\lambda}, \quad \varphi_2 = -2\pi \frac{x_2}{\lambda}.$$

Следовательно, смещение y в точке M будет равно

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right).$$

Вынося общий множитель A и используя формулу для суммы двух синусов, находим:

$$\begin{aligned} y &= 2A \cos \left(2\pi \frac{x_1 - x_2}{2\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right) = \\ &= B \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right), \end{aligned} \quad (58.4)$$

где амплитуда результирующего колебания B имеет вид

$$B = 2A \cos \left(2\pi \frac{x_1 - x_2}{2\lambda} \right). \quad (58.5)$$

В выражении (58.4) множитель, зависящий от времени, показывает, что y будет гармоническим колебанием с тем же периодом T , что и для источников (начальная фаза y для нас интереса сейчас не представляет).

Весьма существенно, что амплитуда B суммарного колебания y зависит от разности расстояний точки M от источников.

Рассмотрим два предельных случая.

1. Пусть разность хода от источников до M равна целому числу длин волн:

$$x_1 - x_2 = n\lambda, \quad (58.6)$$

где через n обозначено любое целое (положительное или отрицательное) число:

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots \quad (58.7)$$

Во всех точках, в которых имеет место (58.6), для B получим:

$$B = 2A \cos n\pi = \pm 2A \quad (58.8)$$

— амплитуда результирующего колебания удвоилась по сравнению с амплитудой каждой из волн, следовательно, волны взаимно усилились. Формула (58.8) дает максимальное возможное значение амплитуды, поскольку косинус не может принимать значения, большего единицы.

2. Пусть разность хода равна целому числу волн с половиной, или, что то же, нечетному числу полуволн:

$$x_1 - x_2 = n\lambda + \frac{1}{2}\lambda = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (58.9)$$

В этом случае

$$B = 2A \cos \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (58.10)$$

— волны взаимно уничтожили друг друга.

Физически понять этот результат нетрудно. Если разность хода от источников волн одинаковой амплитуды до M равна целому числу длин волн [условие (58.6)], то в точке M обе волны одновременно вызовут одинаковое смещение — вверх либо вниз. Если разность хода отличается на целое число волн с половиной (нечетное число полуволн), то смещения, вызываемые волнами, одинаковы по величине, но противоположны по направлению. В таких точках волны гасят друг друга.

Геометрическое место точек, разность расстояний от которых до O_1 и O_2 равна постоянной величине, $x_1 - x_2 = \text{const}$, есть, как это доказывается методами аналитической геометрии, гипербола.

Меняя значение n в выражениях $x_1 - x_2 = n\lambda$ и $x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$, получаем семейства гипербол, показанные на рис. 4.29.

Вдоль гипербол, показанных сплошными линиями, колебания происходят с максимальной амплитудой (здесь $x_1 - x_2 = n\lambda$).

Вдоль гипербол, показанных пунктиром, амплитуда равна нулю, так как $x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$. При переходе от одной гиперболы к соседней амплитуда плавно меняется в пределах от нуля и до $2A$.

В случае, если амплитуды волн A_1 и A_2 различны, то в точках (гипербол), удовлетворяющих условию (58.6), результирующая амплитуда равна

$$B = A_1 + A_2.$$

В точках, удовлетворяющих условию (58.9), полного погашения произойти не может, но амплитуда достигает наименьшего возможного значения, равного модулю разности амплитуд $|A_1 - A_2|$. В остальных точках пространства в зависимости от разности фаз складывающихся колебаний, т. е. от разности хода волн, амплитуда принимает различные значения, непрерывно меняясь в пределах

$$|A_1 - A_2| \leq B \leq A_1 + A_2. \quad (58.11)$$

Это явление взаимного усиления или ослабления волн (в зависимости от значения $x_1 - x_2$), идущих от когерентных источников, и называется интерференцией волн. Аналогично можно рассмотреть интерференцию от многих точечных или непрерывно распределенных источников.

Вспомним теперь, что, как было доказано в § 52, энергия колебания E пропорциональна квадрату амплитуды, что справедливо для любой точки волнового поля. В простейшем случае равенства амплитуд интерферирующих волн находим, что энергия колебания в данной точке волнового поля пропорциональна B^2 и согласно (58.5)

$$E \propto B^2 = 4A^2 \cos^2\left(2\pi \frac{x_1 - x_2}{2\lambda}\right). \quad (58.12)$$

В области максимума амплитуд энергия возрастает в 4 раза (по сравнению с энергией колебаний, возбуждаемых одним источником) в области минимума — равна нулю.

Таким образом, при интерференции происходит перераспределение энергии в пространстве. Средняя же энергия по всему волновому полю от двух одинаковых источников, в соответствии с законом сохранения энергии, удваивается.

Интерференцию волн можно использовать для определения длины волны λ . В томе III будет показано, как можно таким способом определять длины волн светового излучения.

Покажем, как можно определить длину волны с помощью интерференции от двух щелей. Пусть поток волн с длиной λ , которую нужно определить, падает нормально на экран \mathcal{E}_1 (рис. 4.30) с двумя щелями, находящимися на расстоянии h одна от другой (ширину щелей примем, ради простоты, пренебрежимо малой по сравнению с длиной волны). Рассмотрим распределение интенсивности колебаний на экране \mathcal{E}_2 , помещенном параллельно экрану со щелями на расстоянии R от последнего.

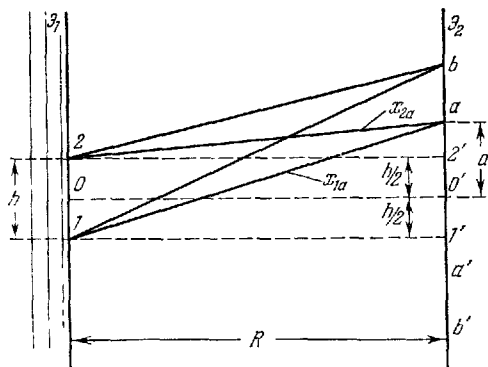


Рис. 4.30.

Щели 1 и 2 на \mathcal{E}_1 будут являться точечными источниками волн справа от \mathcal{E}_1 , причем фазы обоих источников будут совпадать. В точке O' на экране \mathcal{E}_2 , лежащей на равном расстоянии от обоих источников, мы получим, следовательно, максимум колебаний. Найдем теперь расстояние от O до симметрично расположенных точек a и a' , в которых будут ближайшие к O' максимумы. Согласно (58.6) разность хода от источников 1 и 2 должна быть равна одной длине волны. Обозначая расстояния от 1 и 2 до a через x_{1a} и x_{2a} соответственно, имеем:

$$x_{1a} - x_{2a} = \lambda \quad (58.13)$$

(для точки a' мы имели бы $x_{2a} - x_{1a} = \lambda$, и вычисление было бы тождественным с проведенным для точки a). Обозначим расстояние между максимумами $O'a$ через d . Из чертежа видно, что x_{1a} есть гипотенуза прямоугольного треугольника $1'a$ с катетами $1'1 = R$ и $1'a = d + \frac{h}{2}$, а x_{2a} — гипотенуза прямоугольного треугольника $2'a$, где катет $2'2 = R$, а катет $2'a = d - \frac{h}{2}$. Имеем,

следовательно:

$$\left. \begin{aligned} x_{1a}^2 &= R^2 + \left(d + \frac{h}{2}\right)^2, \\ x_{2a}^2 &= R^2 + \left(d - \frac{h}{2}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (58.14)$$

Воспользуемся тем, что в выражении

$$x_{1a}^2 - x_{2a}^2 = (x_{1a} + x_{2a})(x_{1a} - x_{2a})$$

величина $x_{1a} + x_{2a}$ весьма мало отличается от $2R$ (так как и h , и d много меньше R). Полагая приближенно

$$x_{1a} + x_{2a} \approx 2R \quad (58.15)$$

и $x_{1a} - x_{2a} = \lambda$ [согласно (58.13)], имеем: $x_{1a}^2 - x_{2a}^2 = 2R\lambda$. Внося сюда значения x_{1a}^2 и x_{2a}^2 из (58.14) и производя сокращения, находим: $2dh = 2R\lambda$, откуда

$$\lambda = \frac{h}{R} d. \quad (58.16)$$

Предоставляем читателю показать (таким же путем), что не только расстояние $O'a'$ будет также равно d , но и для других, ближайших к центральному, максимумов расстояние между максимумами оказывается одинаковым и равным той же величине d .

Таким образом, зная характерное для используемого прибора отношение h/R и определяя на опыте d , можно найти длину волны λ падающего (нормально) на экран потока волн.

В § 53 было показано, что при наложении колебаний различных частот в некотором интервале $\Delta\omega$ можно получить колебание, ограниченное по своей длительности интервалом Δt . Причем эти интервалы оказались связанными между собой «соотношением неопределенностей»

$$\Delta\omega \Delta t = 2\pi. \quad (58.17)$$

Не проводя аналогичных выкладок с использованием выражения для распространяющейся волны (55.8), можно заключить, что волны одинаковой частоты, но с различной длиной волны и волновым вектором $k = 2\pi/\lambda$ (в о л н о в о й п а к е т) в некотором интервале Δk могут практически полностью погасить друг друга вне некоторого участка Δx , связанного с Δk аналогичным соотношением неопределенностей

$$\Delta k \Delta x = 2\pi. \quad (58.18)$$

Иными словами, волновой пакет, сосредоточенный в некоторой области пространства протяженностью Δx , имеет неопределенность в длине волны, вытекающую из соотношения (58.18). Чем в более узкой области Δx сосредоточен этот пакет, тем больше неопределенность в величине его волнового вектора Δk . Волна же с определенной длиной λ и волновым вектором $k = 2\pi/\lambda$ должна иметь

бесконечную протяженность в пространстве $\Delta x \rightarrow \infty$, т. е. заполнять все пространство.

Таким образом, законы движения волновых образований качественно отличаются от закономерностей движения частиц. Согласно классической механике, движущаяся материальная точка имеет в данный момент t вполне определенную энергию E , а, находясь в данном положении x , имеет одновременно и вполне определенную скорость $v_x = \frac{dx}{dt}$. Волновые же образования расплываются при своем движении согласно соотношениям неопределенностей (58.17) и (58.18). Локализация волнового пакета в строго определенной точке пространства ($\Delta x \rightarrow 0$) приводит к полной неопределенности в длине волны и связанной с последней (например, соотношением (55.6)) скорости распространения.

§ 59. Отражение волн. Стоячие волны

Волна, проходящая на границу раздела двух сред, частично проходит через нее, а частично отражается. При этом в зависимости от отношений плотностей этих сред процесс происходит по-разному. Начнем рассмотрение с двух предельных случаев:

а) вторая среда является менее плотной, а в пределе вообще отсутствует, т. е. упругое тело имеет свободную границу;

б) вторая среда более плотная, что отвечает в пределе неподвижно закрепленному концу упругого тела.

Рассмотрим распространение упругой, для определенности — продольной, волны в стержне для случая а). Пусть левый конец стержня связан с источником колебаний, а правый — свободен. Изучим отдельную деформацию, вызванную источником волны. Пусть, например, в результате движения источника у левого конца стержня возникла деформация сжатия. Эта деформация будет перемещаться вдоль стержня слева направо. Когда деформация достигнет правого, незакрепленного конца стержня, он в результате возникшего слева сжатия получит ускорение вправо. При этом в силу отсутствия упругой среды справа это движение не вызовет никакого дальнейшего сжатия. Деформация слева будет все уменьшаться, а скорость движения — расти. К моменту исчезновения деформации конец стержня будет двигаться с наибольшей скоростью. В силу инерции конца стержня движение в этот момент (в момент исчезновения деформации) не прекратится. Оно будет продолжаться с замедлением, вызывая слева деформацию, но теперь уже — растяжения. Последняя деформация будет перемещаться теперь справа налево.

Аналогично, созданная источником и перемещающаяся вправо деформация растяжения, отразившись от свободного конца стержня, будет перемещаться обратно в виде деформации сжатия. Когда источник совершает гармоническое колебание, он вызы-