

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕРОЯТНОСТЯХ

1. **Определение вероятности.** Пусть в результате некоторого процесса должно произойти одно из нескольких альтернативных \*) событий  $A$ : либо  $A_1$ , либо  $A_2$ , ..., либо  $A_k$  (например, при выстреле в цель пуля может попасть либо в 10, либо в 9, ..., либо в 0, т. е. пролететь мимо цели, итого 11 возможных событий). Как оценить шансы того, что из всех возможных событий произойдет заданное, например  $A_5$ ? В общем случае для такой оценки нужно предварительно сообщить множество проб.

Пусть при  $N$  пробах событие  $A_1$  произошло  $n_1$  раз, событие  $A_2$  —  $n_2$  раз и т. д. Очевидно, что если все возможные события учтены, то

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i = N. \quad (1.1)$$

Чем больше шансов у  $A_5$ , тем больше будет  $n_5$  (разумеется, при данном  $N$ ). Но этого еще недостаточно для строгого определения шансов  $A_5$ . Очевидно, что при повторных сериях из  $N$  проб будут получены несколько иные значения  $n_5$ . Ясно также, что если увеличивать  $N$ , то и  $n_5$  будет увеличиваться в среднем пропорционально  $N$ , а отношение  $n_5/N$  с ростом  $N$  должно стремиться к определенному пределу. В соответствии с этим мы оценим вероятность события  $A_i$  следующим образом:

$$w_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N}. \quad (1.2)$$

Разумеется,  $N = \infty$  недостижимо, и (1.2) означает лишь, что наши выводы тем точнее, чем больше  $N$ . Помня это, будем писать вместо (1.2)

$$w_i = n_i/N, \quad (1.3)$$

откуда

$$n_i = w_i N. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) дает нам вероятное число событий  $A_i$  при  $N$  пробах (при  $w_i$ , определенном строго с помощью (1.2)). Это, конечно, не означает, что при каждой конкретной пробе из  $N$  событий событие  $A_i$  случится именно  $n_i$  раз. Прогноз имеет вероятностный характер, и числа этих событий будут колебаться около значения (1.4). Однако относительные отклонения  $\Delta n_i/n_i$  с ростом  $N$  будут уменьшаться — наш прогноз будет тем точнее, чем больше  $N$ . Отметим, далее, что при выбранном  $N$  величина  $n_i$ , определенная из (1.4), может оказаться нецелой, что для числа событий нелепо. В этом случае наилучшую оценку дает ближайшее целое число.

---

\*) Альтернативных — значит взаимно исключающих друг друга: если пуля попала в 7, значит, она не попала в 6, 8 и т. д.

Разделим (1.1) на  $N$ . Учитывая (1.3), получим

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} = \frac{N}{N}, \text{ т. е. } \sum_{i=1}^k \omega_i = 1. \quad (1.5)$$

Значит, вероятность любого события не может быть больше единицы. Если при данных условиях может реализоваться одно-единственное событие, например  $A_0$ , то оно будет наступать при каждой пробе, т. е.  $n_0 = N$ , откуда  $\omega_0 = n_0/N = 1$  — вероятность достоверного события равна единице. Если событие  $A_e$  невозможно, то  $n_e = 0$  и  $\omega_e = 0$  — вероятность невозможного события равна нулю. Таким образом, вероятность любого события может меняться в пределах

$$0 \leq \omega \leq 1. \quad (1.6)$$

Для многих случаев вероятность события можно определить и не прибегая к опытам, если можно оценить относительную вероятность возможных событий. Так, при бросании монеты может иметь место одно из двух событий: выпадет «орел» либо «решка». Ни одно из них не имеет преимущества перед другим, следовательно, эти события равновероятны. Учитывая, что согласно (1.5) сумма вероятностей всех возможных событий равна единице, находим для искомых вероятностей  $\omega_0 = \omega_p = 1/2$ .

2. Закон сложения вероятностей. Рассмотрим конкретный пример. Пусть в ящике имеется 50 перенумерованных, одинаковых на ощупь шаров. Первые 10 — белые, шары с номерами от 11-го до 30-го — красные и от 31-го до 50-го — зеленые. Шансы быть вытасенными у всех шаров одинаковы. Значит, вероятность вытащить шар с данным номером, например 23, равна  $\omega_{23} = 1/50$  (и, разумеется,  $\omega_{54} = 0$ , ибо с таким номером шаров вообще нет).

Какова вероятность вытащить *белый* шар, независимо от его номера? Обратимся к формуле (1.1). Выделяя при пробах белые шары, мы найдем, что их число  $n_6$  определяется суммой  $n_1 + n_2 + \dots + n_{10}$  (после каждой пробы, естественно, шар возвращается в ящик и они перемешиваются). Поделив эту сумму на  $N$ , найдем

$$\frac{n_6}{N} = \sum_{i=1}^{10} \frac{n_i}{N}, \text{ или } \omega_6 = \sum_{i=1}^{10} \omega_i = 1/5. \quad (1.7)$$

Аналогично

$$\omega_k = \sum_{i=11}^{30} \omega_i = 2/5 \text{ и } \omega_3 = \sum_{i=31}^{50} \omega_i = 2/5 \quad (1.8)$$

— красные шары будут попадаться вдвое чаще, чем белые, зеленые — тоже.

Попался белый шар. Это событие, которое реализуется несколькими альтернативными способами: можно вытащить шар с номером 1, либо с номером 2, ..., либо с номером 10. Мы видим, что искомая вероятность равна сумме вероятностей перечисленных событий:

Если событие  $A$  реализуется одним из ряда альтернативных событий  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , вероятности которых есть  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  соответственно, то вероятность события  $A$  есть

$$\omega_A = \sum_i \omega_i. \quad (1.9)$$

3. Закон умножения вероятностей. Рассматриваемые до сих пор события были простыми, хотя и могли реализоваться различными способами. Однако часто приходится иметь дело со сложными событиями, состоящими из нескольких простых. Пусть, например, из описанного ящика с шарамы извлекаются по очереди два шара (после каждой пробы, конечно, возврат

и тщательное перемешивание!). Какова вероятность того, что первый вынутый шар окажется белым, второй — красным?

Проведем  $N$  проб. Число ожидаемых удач с первым шаром есть

$$n_{1б} = \omega_b N. \quad (I.10)$$

Число ожидаемых удач со вторым шаром при этом будет

$$n_{2к} = \omega_k n_{1б}. \quad (I.11)$$

Здесь справа вместо  $N$  мы пишем  $n_{1б}$ , так как при неудаче с первым шаром результат со вторым уже ничего не меняет — нужная комбинация шаров не достигнута. Подставляя в (I.11) значение  $n_{1б}$  из (I.10), получаем

$$n_{2к} = \omega_b \omega_k N. \quad (I.12)$$

Но  $n_{2к}$  и есть число удач  $n_{бк}$  (когда первый шар оказался белым, второй — красным) при  $N$  пробах, а коэффициент справа при  $N$  — вероятность ожидаемого сложного события, т. е.

$$n_{бк} = n_{2к} = \omega_{бк} N. \quad (I.13)$$

Сравнивая (I.12) и (I.13), находим

$$\omega_{бк} = \omega_b \omega_k. \quad (I.14)$$

При выбранном числе шаров каждого цвета  $\omega_{бк} = (1/5) \cdot (2/5) = 2/25$ . Аналогичным образом, вероятность сложного события — вынуть в первый раз белый шар, затем красный и, наконец, зеленый, — как легко найдет читатель, равна

$$\omega_{бкз} = \omega_b \omega_k \omega_z. \quad (I.15)$$

*Вероятность сложного события равна произведению вероятностей составляющих его простых событий:*

$$\omega_{аб\dots к} = \omega_a \omega_b \dots \omega_k. \quad (I.16)$$

Легко видеть, что в случае двух шаров для вероятности  $\omega_{кб}$  вытащить раньше красный шар, а затем белый имеем  $\omega_{кб} = \omega_{бк}$ . Аналогично в случае трех шаров  $\omega_{бкз} = \omega_{збк} = \omega_{кзб} = \omega_{збк} = \omega_{кзб} = \omega_{збк}$ .

Поставим теперь вопрос иначе. Чему равна вероятность вытащить три шара разных цветов? Поскольку здесь последовательность событий, в отличие от предыдущих случаев, не оговорена, очевидно, что условию задачи отвечают все шесть случаев, вероятности которых мы сейчас выписали. В данном случае сложное событие может быть реализовано шестью альтернативными способами, значит, согласно закону сложения вероятностей искомая вероятность равна сумме перечисленных. Учитывая их равенство, имеем

$$\omega = \omega_{бкз} + \dots + \omega_{зкб} = 3! \omega_{бкз}. \quad (I.17)$$

При выбранном числе шаров каждого цвета  $\omega_{бкз} = 4/125$ ;  $\omega = 24/125$ .

Предоставляем читателю доказать, что: 1) вероятность вытащить белый шар, а затем два цветных равна  $16/125$ ; 2) вероятность вытащить три белых шара равна  $1/125$ ; 3) вероятность вытащить три одноцветных равна  $17/125$ .

## II. СТОЛКНОВЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

1. В § 25 при расчете длины свободного пробега молекул последние рассматривались как твердые, абсолютно упругие шарики. Позднее, в § 40, на рис. 3.6 был изображен примерный характер межмолекулярного взаимодействия. Наличие сил притяжения на расстояниях, превышающих сумму радиусов молекул,

должно несколько увеличить вероятность столкновения, особенно при низких температурах. Оценим этот эффект, используя методы, развитые в первых трех частях настоящего тома.

Рассматривая относительное движение, будем считать одну из соударяющихся молекул неподвижной (тело отсчета), а вторую — движущейся в поле центральной силы, характеризуемой радиусом-вектором  $r$ , проведенным от центра неподвижной молекулы к центру движущейся. Силы отталкивания на малых расстояниях по-прежнему заменим непроницаемостью молекул, когда расстояние между центрами станет равным  $d$ .

Закон сохранения энергии для налетающей молекулы имеет вид

$$mv^2/2 + U(r) = \text{const} = mv_0^2/2. \quad (\text{II.1})$$

На большом расстоянии скорость молекулы  $v_0$ , а потенциальная энергия равна нулю. По мере сближения потенциальная энергия притяжения становится все более отрицательной, величина скорости  $v$  возрастает. С другой стороны, если бы притяжение отсутствовало, то молекула, двигаясь равномерно и прямолинейно, пролетела бы мимо на прицельном расстоянии  $p > d$  и не столкнулась. Наличие же притяжения делает и в этом случае возможным столкновение вследствие искривления траектории. Точный расчет траектории движения не входит в задачу нашего курса. Однако вычисление истинного прицельного расстояния, при котором столкновение еще произойдет, можно выполнить, если кроме закона сохранения энергии использовать еще и закон сохранения момента количества движения. Этот закон, правда, мы вывели только для вращательного движения твердого тела в § 11. В рассматриваемом здесь случае момент центральной силы относительно начала координат равен нулю (линия действия силы проходит через эту точку, и плечо равно нулю). Поэтому и момент количества движения налетающей молекулы, рассматриваемой как материальная точка, относительно начала координат должен сохраняться (точный вывод этого соотношения можно найти в любом курсе теоретической механики). Величина же этого момента равна произведению количества движения на плечо.

В момент достижения минимального расстояния  $d$  скорость ударяющей молекулы  $v_m$  определится из закона сохранения энергии

$$mv_m^2/2 = mv_0^2/2 + U(d). \quad (\text{II.2})$$

Здесь  $U(d) = U_{\text{мин}} < 0$  есть значение потенциальной энергии сил притяжения на расстоянии  $d$ , отмеченное на рис. 3.6 в § 40.

В момент столкновения скорость ударяющей молекулы  $v_m$  направлена по касательной к траектории и перпендикулярна радиусу-вектору, равному по

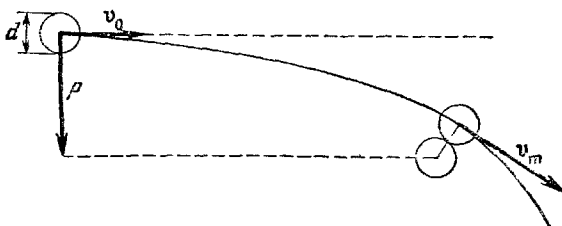


Рис. II.1.

величине  $d$  (рис. II.1). Приравняв величины момента количества движения в положениях максимального удаления и максимального сближения, получим

$$mv_0 \cdot p = mv_m \cdot d. \quad (\text{II.3})$$

Из полученных двух уравнений можно исключить  $v_m$  и определить минимальное прицельное расстояние  $\rho$  и эффективное сечение столкновения

$$\pi r^2 = \pi d^2 \frac{v_m^2}{v_0^2} = \pi d^2 \cdot \left(1 + \frac{|U_{\text{мин}}|}{mv_0^2/2}\right). \quad (\text{II.4})$$

Для молекул с учетом (25.7) и (18.21) имеем  $\overline{mv_{\text{отн}}^2}/2 = 3kT$ . Вводя обозначение  $|U_{\text{мин}}|/(3k) = C$ , получаем

$$\pi r^2 = \pi d^2 \cdot \left(1 + \frac{C}{T}\right). \quad (\text{II.5})$$

В результате полученное ранее выражение (25.14) для длины свободного пробега должно быть заменено на

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi r^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n (1 + C/T)}. \quad (\text{II.6})$$

Величина поправочного множителя Сезерленда  $C$  имеет обычно порядок 100—200 °С.

2. При движении одноименно заряженных частиц между ними действует центральная сила кулоновского отталкивания, обратно пропорциональная квадрату расстояния:

$$F(r) = q_1 \cdot q_2 / r^2, \quad (\text{II.7})$$

что аналогично (лишь с обратным знаком) гравитационному взаимодействию (7.18). Соответствующая потенциальная энергия, аналогично (7.20), выражается зависимостью

$$U(r) = q_1 \cdot q_2 / r. \quad (\text{II.8})$$

Рассмотрим столкновения альфа-частицы (ядро атома гелия с двойным элементарным зарядом  $q_1 = 2e$ ), налетающей с большой скоростью  $v_0$  при прицельном расстоянии  $\rho$  на ядро какого-либо элемента с зарядом  $q_2 = Ze$  ( $Z$  — порядковый номер элемента в таблице Менделеева). Вследствие отталкивания траектория частицы искривляется, и, когда данная альфа-частица пройдет на минимально

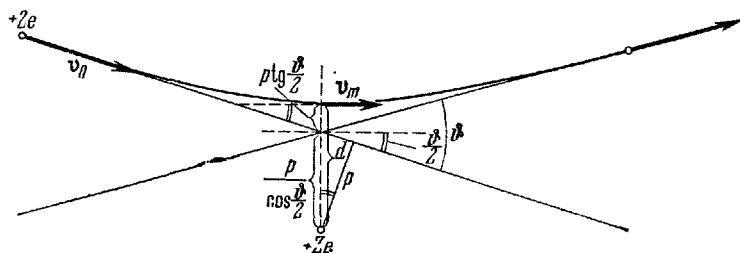


Рис. II.2.

возможном для нее расстоянии  $d$  от ядра, ее скорость достигнет некоторого минимального значения  $v_m$  (рис. II.2). Для определения последних двух величин мы воспользуемся, как и ранее, законами сохранения (II.1) и (II.3). Тогда

$$mv_0^2/2 = mv_m^2/2 + 2Ze^2/d \quad (\text{II.9})$$

и

$$v_0 \rho = v_m d. \quad (\text{II.10})$$

Исключая из этих двух уравнений  $v_m$ , можно получить квадратное уравнение, положительный корень которого даст величину отношения минимального достижимого расстояния к прицельному:

$$d/p = \sqrt{1 + \rho^2} + \rho, \quad (II.11)$$

где

$$\rho = \frac{2Ze^2/p}{mv_0^2/2}. \quad (II.12)$$

В результате отклонения альфа-частицы ее траектория представляет собой ветвь гиперболы, внешний фокус которой расположен в центре отклоняющего ядра. Асимптоты этой гиперболы (рис. II.2) указывают направления движения альфа-частицы до и после столкновения. Угол отклонения между ними обозначим через  $\vartheta$ . Из рисунка видно, что

$$d = \frac{p}{\cos(\vartheta/2)} + p \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$$

и

$$\frac{d}{p} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (II.13)$$

Из сравнения (II.13) и (II.11) следует, что  $\rho = \operatorname{tg}(\vartheta/2)$ , т. е.

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{4Ze^2}{mv_0^2 p} \right). \quad (II.14)$$

Таким образом, при  $p \rightarrow 0$  угол  $\vartheta \rightarrow \pi$ , а скорость  $v_m \rightarrow 0$ , т. е. налетающая «в лоб» частица отлетает обратно по той же прямой.

Если перпендикулярно плоскости, в которой находится ядро  $O$ , летит однородный поток альфа-частиц (рис. II.3), то вероятность их попадания в кольцо, описанное радиусом  $p$  вокруг ядра и шириной  $-dp$ , пропорциональна площади кольца  $-2\pi p dp$ . Каждому значению  $p$  соответствует угол отклонения  $\vartheta$  по соотношению

$$p = \frac{4Ze^2}{mv_0^2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}, \quad (II.15)$$

а интервалу  $-dp$  — интервал углов отклонения  $d\vartheta$ :

$$-dp = \frac{4Ze^2}{mv_0^2} \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} \frac{d\vartheta}{2}. \quad (II.16)$$

Отсюда вероятность того, что альфа-частицы отклоняются в пределах телесного угла  $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ , пропорциональна

$$\begin{aligned} d\omega &\sim -2\pi p dp = 2\pi \left( \frac{4Ze^2}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2)} \frac{d\vartheta}{2} = \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{4Ze^2}{mv_0^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)} = \frac{1}{8} \left( \frac{4Ze^2}{mv_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\vartheta/2)}. \end{aligned} \quad (II.17)$$

Эта зависимость вероятности рассеяния альфа-частиц от угла отклонения была подтверждена в опытах Резерфорда, которые будут описаны в томе III.

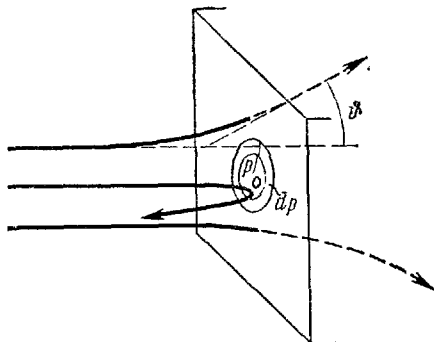


Рис. II.3.