

ГЛАВА II

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

§ 5. Вектор электростатической индукции. Поток индукции

Основной прикладной задачей электростатики является расчет электрических полей, создаваемых в различных приборах и аппаратах (конденсаторы, кабели, электровакуумные приборы и т. д.). В общем виде эта задача решается с помощью закона Кулона и принципа наложения при использовании формул (2.2) и (2.7). Однако уже разобранный в § 2 простейший пример поля двух точечных зарядов (постоянный диполь) иллюстрирует сложность вычисления этим путем распределения значений вектора E в пространстве. При наличии большого числа точечных или пространственно распределенных зарядов эта задача сводится к сложному суммированию или интегрированию.

Еще большие трудности вызывает расчет электрических полей при наличии в пространстве диэлектриков или проводников, внутри которых под действием внешнего поля E_0 происходит смещение и перераспределение микроскопических зарядов, создающих свое дополнительное поле E' .

Поэтому для практического решения основных задач электростатики был разработан целый ряд вспомогательных методов и приемов, использующих подчас весьма сложный математический аппарат. Мы рассмотрим лишь один из простейших методов, основанный на применении теоремы Остроградского—Гаусса (называемой в электротехнике просто теоремой Гаусса). Для вывода ее придется предварительно ввести ряд важных вспомогательных понятий, таких как вектор электростатической индукции и поток этого вектора. Существенную роль для понимания физических свойств поля играют вводимые в данной главе понятия потенциальной энергии и электрического потенциала поля.

В местах появления положительных связанных зарядов будут возникать новые линии суммарного вектора напряженности электри-

ческого поля E , а в местах появления огрицательных связанных зарядов эти линии будут исчезать. Вследствие этого при переходе через границу диэлектрика напряженность электрического поля E и характеризующая ее густота линий поля изменяются скачком. Еще сложнее будет выглядеть картина линий поля в случае, когда связанные заряды распределены в диэлектрике непрерывно (что будет иметь место в неоднородном поле и в случае диэлектрика произвольной формы).

Рассмотрим простейший пример. На рис. 1.13 изображен случай, когда точечный заряд q помещен в центре сферической полости внутри безграничного диэлектрика. Внутри полости вакуум, $\epsilon = 1$ и

$$E_v = \frac{k_0 q}{\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{r}{r}. \quad (5.1)$$

В диэлектрике $\epsilon > 1$ и

$$E_d = k_0 \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon r^2} \cdot \frac{r}{r}. \quad (5.2)$$

На границе полости с диэлектриком концентрируются связанные отрицательные заряды, напряженность поля уменьшается в ϵ раз и соответственно скачком уменьшается густота силовых линий.

Скачкообразное изменение вектора напряженности электрического поля и числа линий напряженности на границах диэлектриков создает ряд неудобств при расчете электрических полей. Поэтому вводят вспомогательное векторное поле

$$D = \epsilon_a E = \epsilon_0 \epsilon E. \quad (5.3)$$

Вектор D , равный произведению вектора напряженности электрического поля на абсолютную диэлектрическую проницаемость среды в данной точке, носит название вектора электростатической индукции (иногда — вектора электрического смещения).

В гауссовой системе единиц $\epsilon_0 = 1$ и D и E имеют одинаковые размерности. Для вакуума $D = E$. В системе СИ размерности D и E различны, в вакууме D и E не совпадают. Это обстоятельство является существенным недостатком системы единиц СИ, обусловленным введением отличной от единицы и размерной величины ϵ_0 .

Подставляя (5.1) и (5.2) в (5.3), легко убедиться, что в рассмотренном выше примере вектор электростатической индукции точечного заряда и в полости, и в диэлектрике выражается одной и той же формулой:

$$D_{t.s.} = k_0 \frac{q}{r^2} \frac{r}{r}. \quad (5.4)$$

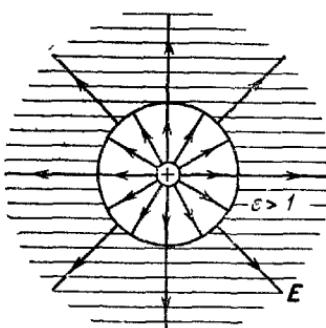


Рис. 1.13

В системе Гаусса абсолютная диэлектрическая проницаемость ϵ_a есть величина безразмерная ($\epsilon_0 = 1$ и $\epsilon_a = \epsilon$) и вектор D согласно (5.3) имеет ту же размерность, что и E , а в пустоте ($\epsilon = 1$) оба эти вектора тождественно равны друг другу. В этой системе $k_g = 1$ и вектор электростатической индукции точечного заряда равен

$$D_{\text{т.з.}} = \frac{q}{r^2} \frac{r}{r} \text{ СГС ед. индукции.} \quad (5.4a)$$

В системе СИ и численные значения, и размерности векторов D и E различны (даже в пустоте, что является большим недостоинством системы СИ). Размерность вектора D в этой системе будет

$$[D] = [\epsilon_0] [E] = \frac{\kappa^2}{\text{n} \cdot \text{м}^2} \frac{\text{n}}{\kappa} = \frac{\kappa}{\text{м}^2}.$$

В системе СИ $k_g = 1/4\pi$ и вектор электростатической индукции точечного заряда равен

$$D_{\text{т.з.}} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{r}{r} \frac{\kappa}{\text{м}^2}. \quad (5.4b)$$

Из определения (5.3) и равенства (2.7) следует, что для поля вектора D имеет место принцип суперпозиции, как и для поля E :

$$D = \sum_i D_i, \quad (5.5)$$

т. е. вектор электростатической индукции, создаваемый в данной точке поля системой электрических зарядов, равен геометрической сумме векторов индукции, создаваемых в той же точке каждым из зарядов в отдельности.

Поле D графически изображается линиями индукции точно так же, как и поле E . Линии индукции проводят так, чтобы в каждой точке их направление совпадало с направлением вектора D в этой же точке, а число линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную к ним, равнялось бы численному значению D в данном месте.

Общая картина поля D оказывается более простой, чем поля E . Для рассмотренного выше (рис. 1.13) примера заряда в центре полости, согласно (5.4) линии вектора D пойдут непрерывно, как это изображено на рис. 1.14. Сопоставляя рис. 1.13 и рис. 1.14, можно видеть основное различие между полями E и D . Линии вектора E начинаются (и кончаются) на любых как свободных, так и связанных

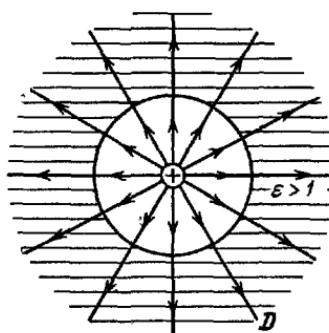


Рис. 1.14.

ных зарядах, и поэтому на границе диэлектрика густота этих линий изменяется скачком. В отличие от этого, линии вектора \mathbf{D} начинаются (и кончаются) только на свободных зарядах, и на границе диэлектрика их густота остается неизменной.

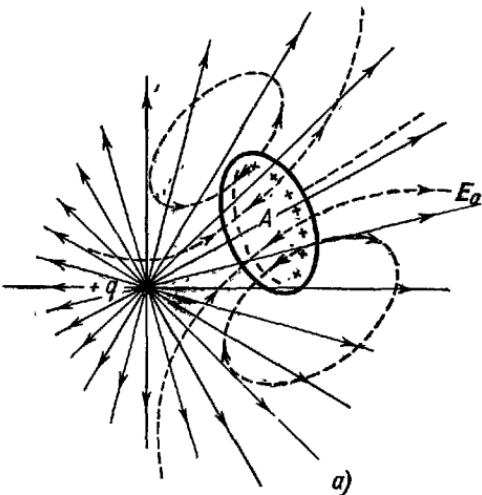
Если бы в рассмотренном примере диэлектрик вовсе отсутствовал, то для точечного заряда в пустоте ($\epsilon = 1$) напряженность электрического поля была бы равна

$$\mathbf{E}_0 = \frac{k_0}{\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.6)$$

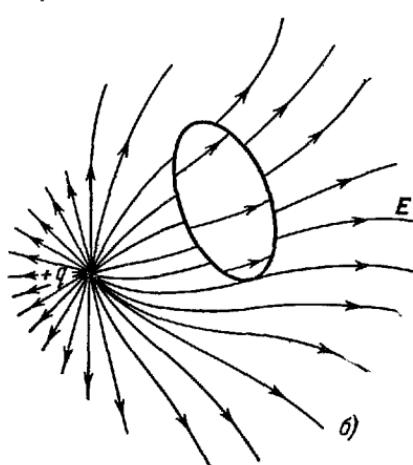
Сопоставляя (5.4) с (5.6), мы видим, что

$$\mathbf{D}_{\text{т.з.}} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0, \quad (5.7)$$

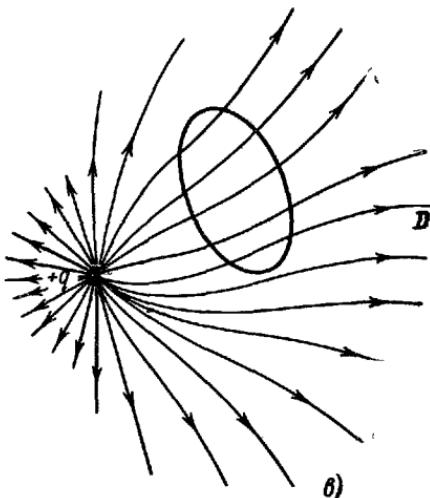
т. е. при наличии диэлектрика вектор \mathbf{D} с точностью до постоянного множителя ϵ_0 (зависящего от выбора системы единиц) совпадает с вектором напряженности электрического



a)



б)



в)

Рис. 1.15.

поля \mathbf{E}_0 в отсутствие диэлектрика. Правда, соотношение (5.7) выполняется лишь в самых простейших случаях. В общем случае диэлектрика произвольной формы характер распределения линий вектора

D может весьма существенно отличаться от картины поля E_0 . На рис. 1.14 было показано сферически симметричное поле E_0 точечного заряда $+q$ в вакууме. Поместим в это поле диэлектрик A произвольной формы. Тогда на поверхности диэлектрика, ближайшей к заряду q , сконцентрируются отрицательные связанные заряды, а на противоположной границе — положительные заряды, как это изображено на рис. 1.15, а. Эти заряды создадут дополнительное довольно сложное поле E' , линии которого показаны пунктиром. Полное поле $E = E_0 + E'$ будет отличаться от поля E_0 особенно сильно внутри диэлектрика, но и вне диэлектрика линии E перестанут быть сферически симметричными и примут вид, изображенный на рис. 1.15, б.

Умножая вектор E на ϵ_a , мы получим вектор D , линии которого изображены на рис. 1.15, в. Вне диэлектрика $\epsilon_a = \epsilon_0 = 1$ (в системе Гаусса) и линии D пойдут так же, как и линии E на рис. 1.15, б. Внутри диэлектрика $\epsilon = \epsilon_a > 1$, линии D направлены так же, как и E , но густота их возрастает так, что на границах диэлектрика количество линий индукции не изменяется. Сопоставляя рис. 1.15, в и а, мы видим, что в этом случае линии вектора D существенно отличаются от линий вектора E_0 , т. е. $D \neq \epsilon_0 E_0$.

Непрерывность линий индукции значительно облегчает вычисление вектора D при заданном распределении свободных зарядов. После того же, как будет найдено распределение значений вспомогательного вектора D во всех точках пространства, можно найти искомые величины вектора напряженности электрического поля

с помощью простого деления на соответствующие значения диэлектрической проницаемости:

$$E = \frac{D}{\epsilon_a}.$$
 | (5.8)

Для вывода основного уравнения, связывающего поле вектора D с распределением свободных зарядов (см. ниже, § 6), введем предварительно еще одну вспомогательную величину — поток вектора D через поверхность.

Рассмотрим простейший случай однородного поля, в котором $D = \text{const}$, т. е. вектор индукции повсюду одинаков и по величине, и по направлению. В этом случае все линии индукции прямые и идут параллельно на одинаковом расстоянии друг от друга (см. рис. 1.16). Построим площадку S произвольной формы, перпендикулярную линиям вектора D , и определим поток индукции через

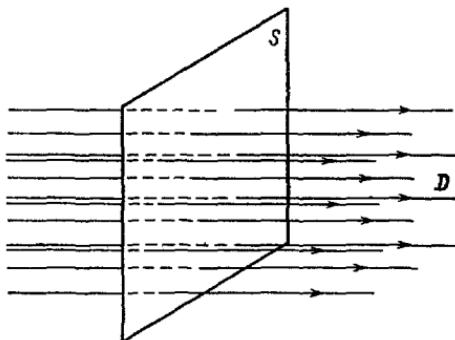


Рис. 1.16.

нее как произведение D на S :

$$N = DS. \quad (5.9)$$

Поскольку через единицу площади проходят D линий индукции, то величина N численно равна полному числу линий индукции, пронизывающих эту площадку. Проведем теперь площадку S наклонно к линиям индукции (см. рис. 1.17). Ориентация площадки в пространстве характеризуется перпендикулярным к ней вектором нормали n . При этом сторона площадки, из которой выходит нормаль n , называется положительной, а противоположная сторона — отрицательной *). Угол α между направлением вектора индукции и нормалью n к площадке может изменяться от 0 до 180° . Для нахождения числа N линий индукции, проходящих через эту площадку, спроектируем последнюю на плоскость, перпендикулярную вектору D . Из рис. 1.17 видно, что через площадку S и ее проекцию S_{np} проходит одинаковое число линий индукции, равное

$$N = DS_{np} = DS \cos \alpha = D_n S, \quad (5.10)$$

где $D_n = D \cos \alpha$ — проекция вектора индукции на направление нормали к площадке.

Величина N , определяемая формулой (5.10), называется потоком вектора электростатической индукции (или потоком вектора электрического смещения) через площадку S . Термин поток заимствован из гидродинамики: определяемый аналогично (5.10) поток вектора скорости численно равен объему жидкости, протекающей за единицу времени через данную площадку.

Поток индукции есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как положительным, так и отрицательным. При $\alpha < 90^\circ$ линии индукции направлены по отношению к площадке в ту же сторону, как и вектор n , выходят из ее положительной стороны, и, следовательно, $N > 0$ (см. рис. 1.18, а).

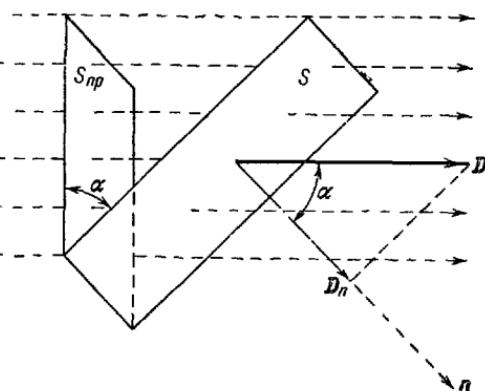


Рис. 1.17.

*) Выбор положительного направления нормали условен. Если площадка ограничивает некоторый объем, то нормаль n направляют обычно наружу по отношению к этому объему.

При $\alpha > 90^\circ$ линии индукции входят в положительную сторону площадки и $N < 0$ (см. рис. 1.18, б). Наконец, при $\alpha = 90^\circ \cos \alpha = 0$ и $N = 0$, так как линии индукции в этом случае скользят вдоль площадки и не пересекают последнюю (см. рис. 1.18, в).

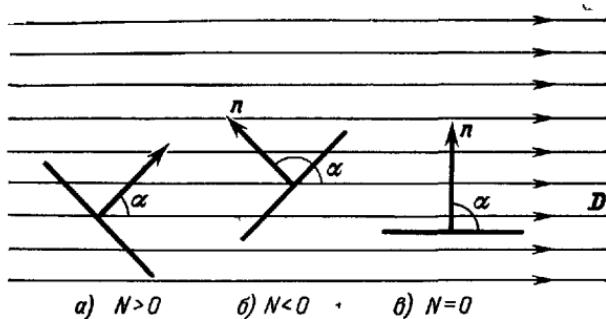


Рис. 1.18.

В общем случае неоднородного поля ($D \neq \text{const}$) и произвольной неплоской поверхности S ($n \neq \text{const}$) для нахождения полного потока вектора электростатической индукции N через площадку ее следует мысленно разбить на отдельные бесконечно малые площадки ΔS

(см. рис. 1.19). Считая каждую такую площадку практически плоской и поле в ее пределах практически постоянным, можно по формуле (5.10) вычислить поток линий индукции, проходящих через эту площадку:

$$\Delta N = D \cos \alpha \Delta S = \\ = D_n \Delta S. \quad (5.11)$$

Рис. 1.19.

Суммируя элементарные потоки ΔN , проходящие через каждый участок поверхности ΔS , по всем таким элементарным участкам, мы найдем полное число линий индукции N , пронизывающих поверхность S :

$$N = \sum_{(S)} D \cos \alpha \Delta S. \quad (5.12)$$

В пределе эта сумма заменится соответствующим интегралом по поверхности:

$$N = \int_{(S)} D \cos \alpha dS = \int_{(S)} D_n dS. \quad (5.13)$$

Из (5.12) и (5.4) следует, что поток вектора электростатической индукции N имеет размерность электрического заряда и в системе единиц СИ измеряется в кулонах.

Если поле создается системой электрических зарядов q_i ($i=1, 2, 3, \dots$), то по принципу наложения (5.5) вектор электростатической индукции \mathbf{D} в любой точке поля равен геометрической сумме векторов \mathbf{D}_i , создаваемых каждым i -м зарядом в этой точке. Проекция геометрической суммы векторов на любое направление (в том числе и на направление нормали к площадке n) равна алгебраической сумме проекций всех этих векторов на то же направление. Согласно (5.12) поток N пропорционален величинам D_n . Поэтому для произвольной поверхности S поток вектора электростатической индукции N , создаваемый системой электрических зарядов, равен алгебраической сумме потоков индукции N_i , создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$N = \sum_i N_i. \quad (5.14)$$

§ 6. Теорема Гаусса

Закон Кулона в форме (2.2) и правило наложения электрических полей (2.7) в принципе позволяют рассчитать поле, созданное любой системой точечных зарядов. В случае непрерывного распределения заряда в пространстве суммирование в (2.7) следует заменить соответствующим интегрированием. Практически, однако, вычисление соответствующих сумм и интегралов часто представляет собой весьма трудоемкую математическую задачу. Поэтому был разработан целый ряд вспомогательных методов и приемов, упрощающих вычисление. Одним из таких практически важных и простых методов является применение теоремы Гаусса, краткий вывод которой мы приведем ниже. Эта теорема позволяет найти поток вектора электростатической индукции через замкнутую поверхность, внутри которой находятся электрические заряды.

Рассмотрим сначала один точечный заряд q , помещенный в центре сферы произвольного радиуса r (см. рис. 1.20), и вычислим полный поток индукции N , проходящий через всю поверхность этой сферы наружу. Из (5.4) следует, что в этом случае численное значение вектора \mathbf{D} на всей сфере S ($r=\text{const}$) одинаково

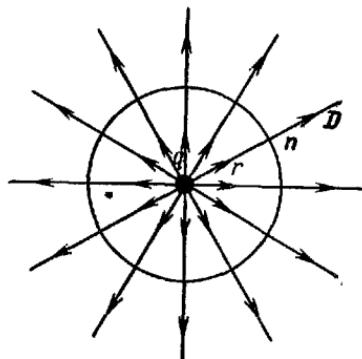


Рис. 1.20.