Из (5.12) и (5.4) следует, что поток вектора электростатической индукции N имеет размерность электрического заряда и в системе единиц СИ измеряется в кулонах.

Если поле создается системой электрических зарядов q_i ($i=1$, 2, 3, ...), то по принципу наложения (5.5) вектор электростатической индукции $\mathbf{D}$ в любой точке поля равен геометрической сумме векторов $\mathbf{D}_i$, создаваемых каждым i-м зарядом в этой точке. Проекция геометрической суммы векторов на любое направление (в том числе и на направление нормали к площадке $\mathbf{n}$) равна алгебраической сумме проекций всех этих векторов на то же направление. Согласно (5.12) поток N пропорционален величинам D_n. Поэтому для произвольной поверхности S поток вектора электростатической индукции N, создаваемый системой электрических зарядов, равен алгебраической сумме потоков индукции N_i, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$N=\sum_i N_i. \tag{5.14}$$

§ 6. Теорема Гаусса

Закон Кулона в форме (2.2) и правило наложения электрических полей (2.7) в принципе позволяют рассчитать поле, создаваемое любой системой точечных зарядов. В случае непрерывного распределения заряда в пространстве суммирование в (2.7) следует заменить соответствующим интегрированием. Практически, однако, вычисление соответствующих сумм и интегралов часто представляет собой весьма трудоемкую математическую задачу. Поэтому был разработан целый ряд вспомогательных методов и приемов, упрощающих вычисление. Одним из таких практически важных и простых методов является применение теоремы Гаусса, краткий вывод которой мы приведем ниже. Эта теорема позволяет найти поток вектора электростатической индукции через замкнутую поверхность, внутри которой находятся электрические заряды.

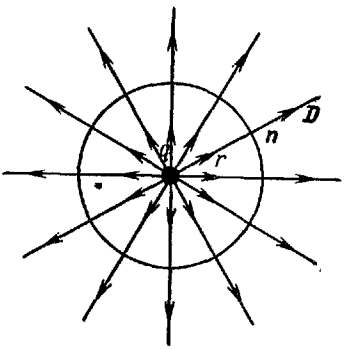

Рис. 1.20.

Рассмотрим сначала один точечный заряд q, помещенный в центре сферы произвольного радиуса r (см. рис. 1.20), и вычислим полный поток индукции N, проходящий через всю поверхность этой сферы наружу. Из (5.4) следует, что в этом случае численное значение вектора $\mathbf{D}$ на всей сфере S ($r=\text{const}$) одинаково

и равно

$$D_{\text{т.з.}} = k_0 \frac{q}{r^2}. \tag{6.1}$$

Кроме того, направление вектора **D** при этом в каждой точке совпадает с направлением внешней нормали к сфере. Тогда входящий в формулу (5.12) $\cos\alpha = \cos 0° = 1$. Поэтому полный поток индукции через нашу сферу равен

$$N = \sum D\Delta S \cdot 1 = D \sum \Delta S = k_0 \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = k_0 \cdot 4\pi q, \tag{6.2}$$

так как полная поверхность сферы $S = 4\pi r^2$.

Из (6.2) следует, что поток индукции, создаваемый точечным зарядом, для сферы любого радиуса с центром в источнике поля одинаков и численно равен $k_0 \cdot 4\pi q$. Проведя две такие концентрические сферы радиусами r_1 и r_2 (см. рис. 1.21), мы видим, что число линий индукции N, пронизывающих обе сферы, одинаково. Между этими сферами линии индукции идут непрерывно, нигде не заканчиваясь и не возникая вновь. Поэтому, если мы проведем между этими двумя сферами замкнутую поверхность S_1 произвольной формы, тоже охватывающую наш точечный заряд q, то полное число линий индукции N через эту поверхность будет также равно $k_0 \cdot 4\pi q$.

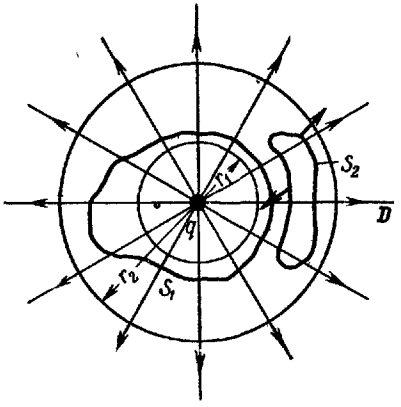

Рис. 1.21.

При вычислении потока через замкнутую поверхность, так же как и в случае сферы, вектор нормали **n** следует считать направленным по отношению к поверхности наружу. Линии индукции, выходящие из объема, ограниченного данной поверхностью, создают положительный поток, линии же, входящие в объем,— отрицательный поток.

Если между нашими сферами с произвольными радиусами расположить замкнутую поверхность S_2, не охватывающую заряда q, то, как видно из рис. 1.21, каждая линия индукции будет пересекать эту поверхность дважды, один раз с положительной стороны (войдет в поверхность), а другой раз с отрицательной стороны (выйдет из поверхности). Поэтому алгебраическая сумма линий индукции, проходящих через замкнутую поверхность S_2, т. е. полный поток индукции N через эту поверхность, будет равна нулю.

Таким образом, для одного точечного заряда q полный поток индукции через любую замкнутую поверхность S будет равен

$$\left.\begin{array}{ll} N=k_0\cdot 4\pi q, & \text{если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;} \\ N=0, & \text{если заряд расположен вне замкнутой поверхности,} \end{array}\right\} \qquad (6.3)$$

и результат этот от формы поверхности не зависит.

В соответствии с (5.14) в общем случае электрического поля, создаваемого произвольной системой точечных зарядов (см. рис. 1.22), полный поток индукции, проходящий через замкнутую поверхность S, равен

$$N=\sum_j N_j=k_0\cdot 4\pi\sum_i q_i, \qquad (6.4)$$

где окончательное суммирование распространяется только на заряды, расположенные внутри этой поверхности. Отсюда получается окончательная формулировка теоремы Гаусса: *поток вектора электростатической индукции через любую замкнутую поверхность численно равен алгебраической сумме находящихся внутри этой поверхности зарядов, умноженной на $4\pi k_0$.*

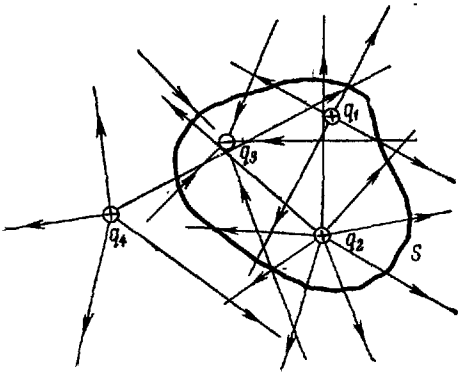

Рис. 1.22.

В гауссовой системе $\varepsilon_0=1$, $k_0=1$ и математическая запись теоремы Гаусса принимает вид:

$$N=4\pi\sum_i q_i. \qquad (6.4а)$$

В системе СИ $k_0=1/4\pi$ и

$$N=\sum_i q_i. \qquad (6.4б)$$

Теорема Гаусса может быть применена не только к векторному полю $\mathbf{D}$, но и к полю $\mathbf{E}_0$, создаваемому только свободными зарядами. Действительно, если убрать из поля все диэлектрики, то

$$\mathbf{D}_{\text{вак}}=\varepsilon_0\mathbf{E}_0. \qquad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.4) и вводя понятие потока вектора напряженности электрического поля

$$N_0=\sum E_0\cos(\widehat{\mathbf{E}_0,\mathbf{n}})\,\Delta S=\sum E_{0n}\,\Delta S, \qquad (6.6)$$

получаем

$$N_0 = \frac{k_0}{\varepsilon_0} 4\pi \sum_i q_i. \tag{6.7}$$

Теорему Гаусса можно было бы вывести также для полного макроскопического поля **E**, если учитывать все его источники — как свободные, так и связанные заряды Поскольку, однако, распределение связанных зарядов само зависит от **E**, то пользоваться подобным соотношением неудобно, и на практике оно не применяется.

Как будет показано в следующем параграфе, теорема Гаусса (6.4) позволяет сравнительно просто рассчитывать электрические поля при симметричных распределениях зарядов и окружающих их диэлектриков. В более общем случае целесообразно, применяя теорему Гаусса к любому макроскопически малому объему, перейти от интегрального соотношения (6.4) к эквивалентным ему дифференциальным. Эти дифференциальные уравнения в частных производных рассматриваются и решаются в теоретической электродинамике (уравнения Максвелла).

§ 7. Примеры применения теоремы Гаусса

Разберем несколько примеров применения теоремы Гаусса к расчету электрических полей в простейших практически важных случаях.

Пример 1. *Поле равномерно заряженной сферы.*

Сферу радиуса R, помещенную в среду с диэлектрической проницаемостью ε, зарядим так, чтобы весь ее заряд q равномерно распределился по поверхности (рис. 1.23, *а*). На каждой единице площади поверхности шара будет тогда находиться заряд

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}. \tag{7.1}$$

Величина σ называется поверхностной плотностью электрического заряда (ее единицей является, например, $к/м^2$).

Так как заряд расположен совершенно симметрично, то и создаваемое им электрическое поле также должно обладать сферической симметрией. Следовательно, линии вектора индукции **D** должны быть направлены по радиусам, проведенным из центра шара (рис. 1.23, *а*), а численное значение D может зависеть только от расстояния r до центра шара. Вид этой зависимости

$$D = D(r) \tag{7.2}$$

мы найдем с помощью теоремы Гаусса.