

получаем

$$N_0 = \frac{k_0}{\epsilon_0} 4\pi \sum_i q_i. \quad (6.7)$$

Теорему Гаусса можно было бы вывести также для полного макроскопического поля \mathbf{E} , если учитывать все его источники — как свободные, так и связанные заряды. Поскольку, однако, распределение связанных зарядов само зависит от \mathbf{E} , то пользоваться подобным соотношением неудобно, и на практике оно не применяется.

Как будет показано в следующем параграфе, теорема Гаусса (6.4) позволяет сравнительно просто рассчитывать электрические поля при симметричных распределениях зарядов и окружающих их диэлектриков. В более общем случае целесообразно, применяя теорему Гаусса к любому макроскопически малому объему, перейти от интегрального соотношения (6.4) к эквивалентным ему дифференциальным. Эти дифференциальные уравнения в частных производных рассматриваются и решаются в теоретической электродинамике (уравнения Максвелла).

§ 7. Примеры применения теоремы Гаусса

Разберем несколько примеров применения теоремы Гаусса к расчету электрических полей в простейших практически важных случаях.

Пример 1. Поле равномерно заряженной сферы.

Сферу радиуса R , помещенную в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ , зарядим так, чтобы весь ее заряд q равномерно распределился по поверхности (рис. 1.23, а). На каждой единице площади поверхности шара будет тогда находиться заряд

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}. \quad (7.1)$$

Величина σ называется *поверхностной плотностью электрического заряда* (ее единицей является, например, C/m^2).

Так как зарядложен совершенно симметрично, то и создаваемое им электрическое поле также должно обладать сферической симметрией. Следовательно, линии вектора индукции \mathbf{D} должны быть направлены по радиусам, проведенным из центра шара (рис. 1.23, а), а численное значение D может зависеть только от расстояния r до центра шара. Вид этой зависимости

$$D = D(r) \quad (7.2)$$

мы найдем с помощью теоремы Гаусса.

Представим себе мысленно вспомогательную сферу S' произвольного радиуса $r > R$, концентрически охватывающую наш шар. Эта сфера изображена на рис. 1.23, а штрих-пунктиром. Вычислим поток индукции через сферу S' . Из (5.12) и (7.2) следует

$$N = \int D dS \cos \alpha = D(r) \int dS \cdot 1 = D(r) \cdot 4\pi r^2. \quad (7.3)$$

Так как $r > R$, то суммарный заряд, заключенный внутри этой сферы, равен полному заряду шара:

$$\sum q_i = q. \quad (7.4)$$

Подставляя (7.3) и (7.4) соответственно в левую и правую части

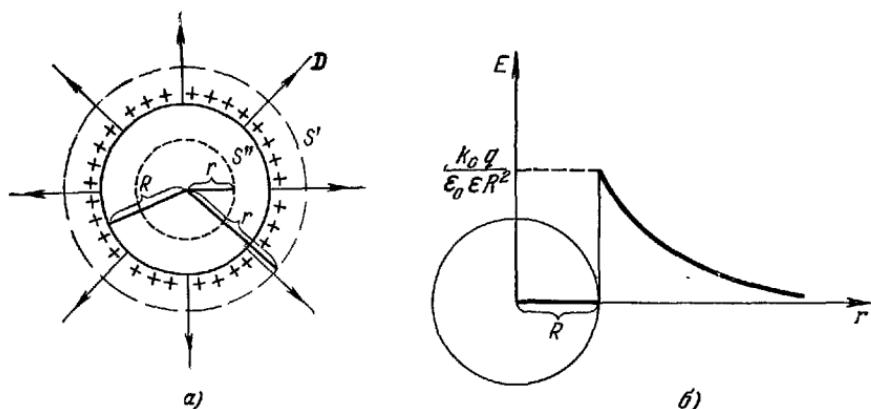


Рис. 1.23.

формулировки теоремы Гаусса (6.4), получаем $D(r) \cdot 4\pi r^2 = k_0 \cdot 4\pi q$, откуда

$$D(r) = D_{\text{вне шара}} = k_0 \frac{q}{r^2} \quad (7.5)$$

и соответственно

$$E_{\text{вне шара}} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} = k_0 \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon r^2}. \quad (7.5a)$$

Для изображенной на рис. 1.23, а пунктиром сферы S'' радиуса $r < R$ поток индукции выражается также формулой (7.3). Однако в этом случае внутри сферы S'' зарядов нет и

$$\sum q_i = 0. \quad (7.6)$$

Подставляя (7.3) и (7.6) в (6.4), получаем $D(r) \cdot 4\pi r^2 = 0$; следовательно,

$$D_{\text{внутри шара}} = 0 \quad (7.7)$$

и

$$E_{\text{внутри шара}} = 0. \quad (7.8)$$

Сравнивая (7.5) с (2.4), видим, что электрическое поле снаружи шара, равномерно заряженного по поверхности, в точности такое же, как если бы весь заряд шара q был сосредоточен в одной точке — центре шара. Внутри же шара поле, создаваемые зарядами, расположеными на отдельных участках его поверхности, взаимно компенсируются и суммарное поле равно нулю. График зависимости E от r вне и внутри шара изображен на рис. 1.23, б; видно, что на границе шара напряженность электрического поля меняется не непрерывно, а скачкообразно, возрастаая от $E=0$ внутри шара до

$$\left| E = k_0 \frac{q}{\epsilon_0 R^2} \right| \quad (7.9)$$

на внешней его поверхности.

Пример 2. Поле равномерно заряженной плоскости.

Представим себе равномерно заряженную бесконечную плоскость (рис. 1.24) с постоянной поверхностной плотностью заряда σ . Линии индукции в этом случае, очевидно, должны быть направлены симметрично в обе стороны от плоскости и идти перпендикулярно ей. Из симметрии также следует, что абсолютная величина вектора индукции D может зависеть только от расстояния x до плоскости.

Для нахождения вида зависимости $D=D(x)$ мы применим теорему Гаусса к замкнутой цилиндрической поверхности, изображенной на том же рис. 1.24. Ось цилиндра перпендикулярна заряженной

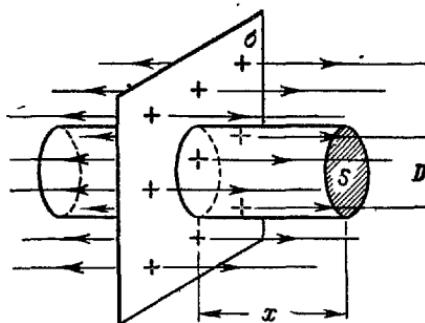


Рис. 1.24.

плоскости, и последняя делит высоту цилиндра $2x$ пополам. Оба основания параллельны заряженной плоскости и имеют одинаковую площадь S .

Поток индукции через цилиндрическую поверхность равен

$$N = \sum_{\text{бок. пов.}} D \Delta S \cos \alpha + 2 \sum_{\text{основ.}} D \Delta S \cos \alpha. \quad (7.10)$$

На боковой поверхности вектор \mathbf{D} параллелен поверхности и $\cos \alpha = 0$. На торцах цилиндра вектор \mathbf{D} перпендикулярен поверхности и $\cos \alpha = 1$, а величина D одинакова на обоих основаниях; следовательно,

$$N = 2 \sum_{\text{основ}} D \Delta S \cdot 1 = 2DS. \quad (7.11)$$

Проведенная цилиндрическая поверхность вырезает из плоскости такую же площадку S с полным зарядом

$$\sum q_i = \sigma S. \quad (7.12)$$

Подставляя (7.11) и (7.12) соответственно в левую и правую части (6.4), получаем

$$2DS = k_0 \cdot 4\pi\sigma S,$$

откуда

$$D_{\text{пл}} = k_0 \cdot 2\pi\sigma = \text{const} \quad (7.13)$$

и соответственно

$$E_{\text{пл}} = k_0 \frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0 s}. \quad (7.14)$$

В системе Гаусса $\epsilon_0 = 1$, $k_0 = 1$ и

$$E_{\text{пл}} = \frac{2\pi\sigma}{s}. \quad (7.14a)$$

В системе СИ $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$, $k_0 = 1/4\pi$, и благодаря этому в окончательном выражении

$$E_{\text{пл}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma}{2\epsilon_a} \quad (7.14b)$$

отсутствует множитель, содержащий 4π (поле не обладает сферической симметрией).

Из (7.13) следует, что по обе стороны плоскости вектор индукции \mathbf{D} во всех точках одинаков по величине и направлению, т. е. образует однородное поле ($\mathbf{D} = \text{const}$).

Для отрицательно заряженной плоскости $\sigma < 0$ и линии индукции справа и слева входят в плоскость, кончаясь на отрицательных зарядах. В случае равномерно заряженной плоскости с конечными размерами L выражение (7.13) будет справедливым для точек поля, находящихся на расстоянии x от плоскости, достаточно малом по сравнению с L , и не слишком близких к ее краям. У краев же пластины и на расстояниях, сравнимых с размерами последней, электрическое поле перестает быть однородным.

Пример 3. Поле между двумя плоскостями, равномерно с одинаковой плотностью заряженными разноименными зарядами (плоский конденсатор).

Рассмотрим систему двух бесконечных плоскостей (пластин), расположенных параллельно друг другу и равномерно заряженных зарядами противоположного знака с одинаковой поверхностной плотностью. Поверхностную плотность заряда на пластинах обозначим соответственно через $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис. 1.25). Линии индукции D_+ , пластины, идут в обе стороны от пластины, как показано на рис. 1.25 простым пунктиром. Абсолютная величина вектора индукции равна $k_0 \cdot 2\pi\sigma$. Поле, создаваемое отрицательной пластиной, D_- , также однородно и имеет ту же абсолютную величину $k_0 \cdot 2\pi\sigma$, но линии индукции его направлены к пластине, как показано на том же рисунке штрих-пунктиром.



Рис. 1.25.

Результирующее поле, созданное обеими плоскостями, определится по принципу наложения (5.5). Как видно из чертежа, вне конденсатора поля направлены одинаково и

но из конденсатора, вне конденсатора линии индукции от обеих пластин направлены противоположно друг другу и взаимно компенсируются, т. е. поле отсутствует:

$$D_{\text{внешн}} = 0 \quad \text{и} \quad E_{\text{внешн}} = 0. \quad (7.15)$$

Внутри же конденсатора оба поля направлены одинаково и

$$D_{\text{внутр}} = k_0 \cdot 2\pi\sigma + k_0 \cdot 2\pi\sigma = k_0 \cdot 4\pi\sigma. \quad (7.16)$$

Отсюда напряженность поля в любой точке между пластинами

$$E_{\text{внутр}} = \frac{D_{\text{внутр}}}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{k_0}{\epsilon_0} \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}, \quad (7.17)$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами. В пустоте напряженность поля между пластинами равна

$E_0 = \frac{k_0}{\epsilon_0} 4\pi\sigma.$

(7.18)

Из (7.15) и (7.17) следует, что поле безгранично протяженного плоского конденсатора целиком сосредоточено между его пластинами и однородно. Полученный результат можно приближенно применять и для конденсаторов конечных размеров, причем ошибка в расчете внутреннего поля будет тем меньше, чем меньше расстояние между пластинами d по сравнению с линейными размерами самих пластин. На рис. 1.26 изображена примерная картина линий поля в реальном плоском конденсаторе конечных размеров.

Суммарное поле $E_{\text{внутр}}$ действует на любой посторонний заряд q' , помещенный между пластинами. На заряды же, расположенные на каждой из пластин, действует вдвое меньшее поле (7.14), создаваемое только другой пластиной конденсатора. Поле положительной пластины направлено от нее и действует на отрицательные заряды второй пластины с силой, направленной против поля, т. е. с силой притяжения. Поскольку эти заряды связаны с пластиной, то на всю пластину площади S действует суммарная сила притяжения

$$F = qE = \sigma Sk_0 \frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0 e} = k_0 \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon_0 e} S. \quad (7.19)$$

Такая же сила притяжения действует и на положительную пластину; между пластинами конденсатора возникает взаимное притяжение с силой на единицу площади

$$f = \frac{F}{S} = k_0 \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon_0 e}. \quad (7.20)$$

Подобные механические силы, возникающие между заряженными макроскопическими телами, носят название пондеромоторных сил. Эти силы действуют на проводники и диэлектрики, помещенные в электрическое поле, и заставляют их перемещаться в этом поле и деформироваться. Общий метод вычисления пондеромоторных сил будет указан ниже, в § 13. Измеряя пондеромоторные силы, например, с помощью пружинных весов, мы получаем возможность определения величин электрических зарядов и полей механическим путем. На этом принципе работают так называемые абсолютные электрометры.

Пример 4. Поле равномерно заряженного шара.

Сферу радиуса R , изображенную выше на рис. 1.23, *a*, зарядим равномерно по всему объему. Объемную плотность заряда обозначим

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3}. \quad (7.21)$$

Учитывая те же условия симметрии, как и в примере 1, можно написать, что для сферы произвольного радиуса r с центром, совпадающим с центром нашего шара, поток вектора электростатической индукции будет

$$N = D(r) 4\pi r^2. \quad (7.22)$$

При $r > R$ суммарный заряд, заключенный внутри сферы, равен полному заряду шара q и на основании теоремы Гаусса, так же

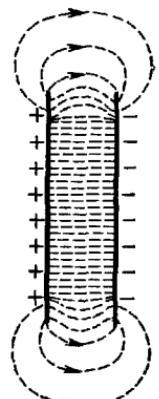


Рис. 1.26.

как и в примере 1,

$$D_{\text{внеш шара}} = k_0 \frac{q}{r^2}. \quad (7.23)$$

При $r < R$ суммарный заряд, заключенный внутри сферы, будет равен

$$\sum q_i = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = q \frac{r^3}{R^3}. \quad (7.24)$$

По теореме Гаусса

$$D(r) 4\pi r^2 = k_0 4\pi q \frac{r^3}{R^3}$$

и

$$D_{\text{внутри шара}} = \frac{k_0 qr}{R^3}. \quad (7.25)$$

Если внутри шара $\epsilon = 1$, а вне шара $\epsilon \neq 1$, то для напряженности электрического поля имеем

$$\left. \begin{array}{l} E_{\text{внутри шара}} = \frac{k_0 q}{\epsilon_0 R^2} r \quad (\text{при } r \leq R), \\ E_{\text{внеш шара}} = \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon r^2} \quad (\text{при } r \geq R). \end{array} \right\} \quad (7.26)$$

В центре шара при $r=0$ напряженность электрического поля равна нулю. С ростом r величина E линейно возрастает до некоторого

максимального значения $E_{\text{max}} = \frac{k_0 q}{\epsilon_0 R^2}$ на поверхности шара. На границе с диэлектриком напряженность электрического поля изменяется скачком и вне шара постепенно убывает от значения $E'_{\text{max}} = \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon R^2}$ до нуля. График зависимости E от r вне и внутри шара согласно (7.26) при $\epsilon = 1$, т. е. в отсутствии скачка, изображен на рис. 1.27.

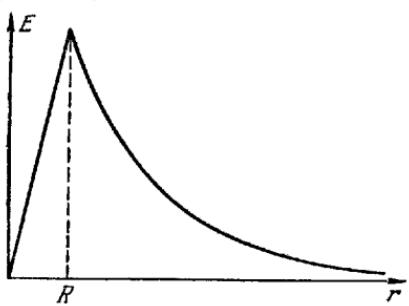


Рис. 1.27.

Расчет напряженности электрического поля внутри шара можно было провести и иным способом. Если разбить весь шар на элементарные объемы dV , то каждый из них будет обладать зарядом QdV и создавать в некоторой точке M внутри шара, находящейся от него на расстоянии x , элементарную напряженность поля

$$dE_M = \frac{k_0}{\epsilon_0} \frac{QdV}{x^2} \frac{x}{x}. \quad (7.27)$$

Суммируя эти поля от всех объемчиков, расположенных на различных расстояниях x от точки M , можно найти полное поле в этой точке

$$E_M = \int dE_M. \quad (7.28)$$

Результат вычислений по формуле (7.28) полностью совпадает с расчетом $E_{\text{внутри шара}}$ по формуле (7.26).

При вычислении по формуле (7.28) мы складываем поля от всех элементарных зарядов qdv , в том числе и от заряда, расположенного в точке M .

Рассмотренные в настоящем параграфе примеры демонстрируют практическую важность использования теоремы Гаусса для вычисления электрических полей, обладающих симметрией. Применяя указанный метод, читатель сможет сам рассчитать поле сферического или цилиндрического конденсатора. Приведем без вывода решение для последнего случая.

Пусть два коаксиальных бесконечно длинных цилиндра радиусами R_1 и $R_2 > R_1$ (рис. 1.28) равномерно заряжены по всей поверхности электричеством противоположных знаков. Поверхностная плотность заряда на обоих цилиндрах, чтобы на единицу высоты каждого цилиндра приходился одинаковый по абсолютной величине заряд q_1 , должна быть различной. Выбирая замкнутые поверхности в виде коаксиальных цилиндров различных радиусов r и применяя теорему Гаусса, можно доказать, что все электрическое поле сосредоточено между цилиндрами, направлено перпендикулярно их поверхностям и убывает обратно пропорционально расстоянию r от их оси по формуле

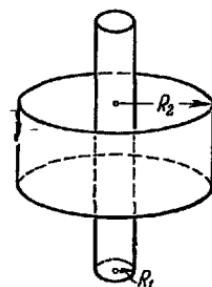


Рис. 1.28.

$$E_{\text{цил. конд.}} = k \frac{2q_1}{\epsilon_0 r} \quad (7.29)$$

В радиолампах и ионизационных счетчиках радиоактивных излучений противоположно заряженные электроды (катод и анод) выполняются обычно в виде цилиндрической нити и коаксиального с ней внешнего цилиндра. Такой же характер имеет электрическое поле в коаксиальном кабеле, где полость между центральной жилой и цилиндрической броней заполняется диэлектриком. При радиусе внешнего цилиндра, малом по сравнению с его длиной, образованный обоями цилиндрами цилиндрический конденсатор можно считать практически бесконечно длинным и для расчета электрических полей использовать полученный выше результат (7.29).

§ 8. Потенциал электростатического поля

На точечный электрический заряд q' , находящийся в электрическом поле E , действует сила $F = q'E$. При перемещении заряда в поле эта сила совершает работу. Можно доказать для самого общего случая, что величина работы по перемещению заряда q' в электростатическом поле зависит лишь от его начального и конечного положений и не зависит от пути движения.