

Результат вычислений по формуле (7.28) полностью совпадает с расчетом $E_{\text{внутри шара}}$ по формуле (7.26).

При вычислении по формуле (7.28) мы складываем поля от всех элементарных зарядов qdv , в том числе и от заряда, расположенного в точке M .

Рассмотренные в настоящем параграфе примеры демонстрируют практическую важность использования теоремы Гаусса для вычисления электрических полей, обладающих симметрией. Применяя указанный метод, читатель сможет сам рассчитать поле сферического или цилиндрического конденсатора. Приведем без вывода решение для последнего случая.

Пусть два коаксиальных бесконечно длинных цилиндра радиусами R_1 и $R_2 > R_1$ (рис. 1.28) равномерно заряжены по всей поверхности электричеством противоположных знаков. Поверхностная плотность заряда на обоих цилиндрах, чтобы на единицу высоты каждого цилиндра приходился одинаковый по абсолютной величине заряд q_1 , должна быть различной. Выбирая замкнутые поверхности в виде коаксиальных цилиндров различных радиусов r и применяя теорему Гаусса, можно доказать, что все электрическое поле сосредоточено между цилиндрами, направлено перпендикулярно их поверхностям и убывает обратно пропорционально расстоянию r от их оси по формуле

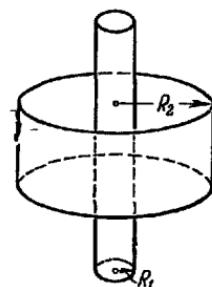


Рис. 1.28.

$$E_{\text{цил. конд.}} = k \frac{2q_1}{\epsilon_0 r} \quad (7.29)$$

В радиолампах и ионизационных счетчиках радиоактивных излучений противоположно заряженные электроды (катод и анод) выполняются обычно в виде цилиндрической нити и коаксиального с ней внешнего цилиндра. Такой же характер имеет электрическое поле в коаксиальном кабеле, где полость между центральной жилой и цилиндрической броней заполняется диэлектриком. При радиусе внешнего цилиндра, малом по сравнению с его длиной, образованный обоями цилиндрами цилиндрический конденсатор можно считать практически бесконечно длинным и для расчета электрических полей использовать полученный выше результат (7.29).

§ 8. Потенциал электростатического поля

На точечный электрический заряд q' , находящийся в электрическом поле E , действует сила $F = q'E$. При перемещении заряда в поле эта сила совершает работу. Можно доказать для самого общего случая, что величина работы по перемещению заряда q' в электростатическом поле зависит лишь от его начального и конечного положений и не зависит от пути движения.

Мы докажем это важное положение сначала для частного случая электрического поля точечного заряда, а затем обобщим полученный результат на случай поля, отвечающего произвольному распределению зарядов. На рис. 1.29 изображены линии поля, создаваемого точечным зарядом q , и траектория перемещения пробного заряда q' . Выделим бесконечно малый отрезок этой траектории $d\mathbf{l}$. При перемещении заряда q' на отрезке $d\mathbf{l}$ на него действует сила

$$\mathbf{F} = q' \mathbf{E} = q' \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

и совершается элементарная работа

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{l} \cos(\widehat{\mathbf{F}, d\mathbf{l}}) = q' \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon r^2} d\mathbf{l} \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{l}}).$$

Рис. 1.29.

Из чертежа видно, что величина $d\mathbf{l} \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{l}})$ есть проекция перемещения $d\mathbf{l}$ на направление радиус-вектора \mathbf{r} и численно равна приращению длины радиус-вектора:

$$d\mathbf{l} \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{l}}) = dr. \quad (8.1)$$

Поэтому окончательно имеем

$$dA = q' \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon r^2} dr. \quad (8.2)$$

Для нахождения полной работы, совершающейся полем при перемещении пробного заряда q' из положения 1 в положение 2, следует выражение (8.2) для элементарной работы проинтегрировать по всему пути:

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA = q' \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = q' \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = q' \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad | \quad (8.3)$$

Из (8.3) следует, что то же выражение для работы получится и при перемещении пробного заряда между указанными двумя точками и по любому другому пути, изображенному на рис. 1.29 пунктиром. Таким образом, работа перемещения пробного заряда q' в поле, создаваемом одиночным точечным зарядом q , действительно не зависит от пути перехода из начального положения в конечное и является функцией начального (r_1) и конечного (r_2) расстояний между зарядами q и q' . Силовое поле, обладающее таким свойством, называется потенциальным полем.

Введем следующую функцию расстояния r между зарядами:

$$W(r) = k_0 \frac{qq'}{\epsilon_0 \epsilon r} + C, \quad (8.4)$$

где C — произвольная постоянная. Сопоставляя (8.4) и (8.3), видим, что разность значений этой функции в положениях 1 и 2 дает работу, производимую электрическими силами при перемещении заряда q' из точки 1 в точку 2. Действительно,

$$W(r_1) - W(r_2) = \left[k_0 \frac{qq'}{\epsilon_0 \epsilon r_1} + C \right] - \left[k_0 \frac{qq'}{\epsilon_0 \epsilon r_2} + C \right] = k_0 \frac{qq'}{\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (8.5)$$

и

$$A_{1,2} = W_1 - W_2. \quad (8.6)$$

В рассматриваемом случае как выражение для работы $A_{1,2}$, так и вид функции $W(r)$ симметричны относительно обоих зарядов q и q' . Эта симметрия характерна для точечных зарядов и связана с тем, что вектор \mathbf{F} представляет собой силу взаимодействия между обоими зарядами.

Анализируя соотношение (8.6) и сопоставляя его с аналогичными соотношениями в механике, мы приходим к заключению, что функция $W(r)$ должна рассматриваться как потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов q и q' , находящихся на расстоянии r друг от друга. Формула (8.6) тогда означает, что работа электрических сил при перемещении заряда q' произведена за счет уменьшения потенциальной энергии взаимодействия q и q' . Поскольку q играет в данном случае роль источника поля, а движется в этом поле заряд q' , функцию $W(r)$ можно называть потенциальной энергией заряда q' в данном электрическом поле, созданном зарядом q .

Здесь, как и в механике, потенциальная энергия определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной C . Это связано с тем, что физический смысл имеет собственно говоря, лишь разность потенциальных энергий в двух точках пространства, выражающая работу, производимую при переходе из одной точки в другую. При нахождении же этой разности произвольная постоянная исключается, как видно из (8.5).

В рассмотренном выше (рис. 1.29) примере будем перемещать пробный заряд q' из точки 1 за пределы поля, т. е. в бесконечность, где напряженность электрического поля $E_{\text{т.з.}}$ равна нулю. Такую бесконечно удаленную точку ($r_2 = \infty$) можно выбрать за начало отсчета потенциальной энергии и положить потенциальную энергию в этой точке равной нулю:

$$W_\infty = 0. \quad (8.7)$$

Для этого необходимо в общем выражении (8.4) положить произвольную постоянную $C = 0$.

Из формул (8.4) — (8.7) тогда следует:

$$A_{1,\infty} = W_1 - W_\infty = W_1 = q' \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon r_1} \quad (8.8)$$

и потенциальная энергия заряда q' в точке r , численно равна работе, которую надо затратить, чтобы удалить q' из данной точки поля в бесконечность. Для одноименных зарядов $qq' > 0$ и $W_1 > 0$, т. е. энергия их взаимодействия положительна, и при раздвижении этих зарядов на бесконечность силы отталкивания между ними могут совершить положительную работу $A_{1,\infty} > 0$. Для разноименных зарядов $qq' < 0$, т. е. энергия взаимодействия отрицательна, и для раздвижения этих зарядов на бесконечность придется затратить внешнюю работу $-A_{1,\infty}$ против электростатических сил.

Следует твердо помнить, что потенциальная энергия есть энергия взаимная, причем оба взаимодействующих заряда входят в выражение для потенциальной энергии их взаимодействия совершенно симметрично. К выражению (8.8) для взаимной потенциальной энергии зарядов можно прийти, считая, что заряд q' находится в электрическом поле заряда q , либо что заряд q находится в электрическом поле заряда q' .

Перейдем теперь к общему случаю произвольного распределения зарядов — «источников поля». Как было установлено выше (принцип наложения), суммарное поле, создаваемое системой зарядов, равно сумме полей точечных зарядов, образующих систему. Следовательно, сила, действующая на пробный заряд q' , равна геометрической сумме сил, а работа при его перемещении в электрическом поле всех зарядов системы равна алгебраической сумме работ перемещения в поле каждого из зарядов. Поскольку эта работа для каждого из полей не зависит от формы пути, то она не зависит от формы пути для суммарного поля произвольной (статической) системы зарядов. Следовательно, работа по перемещению пробного заряда в произвольном электрическом поле выражается формулой

$$A_{1,2} = \int_1^2 F dl \cos(\widehat{F, dl}) = q' \int_1^2 E dl \cos(\widehat{E, dl}) = W_1 - W_2, \quad (8.9)$$

аналогичной выражению (8.6). Здесь под W_1 и W_2 следует понимать значения потенциальной энергии пробного заряда в точках 1 и 2 суммарного поля.

Функция W в общем случае является суммой выражений типа (8.8) с соответственными значениями расстояний r_i от пробного заряда q' до каждого из источников поля *).

*.) Некоторые формальные затруднения с определением и нормировкой W возникают в идеализированных примерах с бесконечно протяженными элек-

Из (8.9), далее, видно, что работа и энергия прямо пропорциональны величине пробного заряда q' . Отношение

$$\left| \frac{W}{q'} = \varphi \right| \quad (8.10)$$

зависящее от положения пробного заряда, но уже не зависящее от численной величины последнего, характеризует свойства поля в данной его точке и называется электрическим потенциалом или просто потенциалом этой точки.

Сохранив введенное выше условие (8.7) для начала отсчета энергии, находим, что

$$\varphi_{\infty} = \frac{W_{\infty}}{q'} = 0, \quad (8.11)$$

т. е. потенциал в бесконечно удаленных точках поля равен нулю. Из (8.7), (8.8) и (8.10), далее, следует, что

$$\Phi_1 = \frac{W_1}{q'} = \frac{W_1 - W_{\infty}}{q'} = \frac{A_{1,\infty}}{q'} = \int_1^{\infty} E dl \cos(\widehat{E, dl}), \quad (8.12)$$

т. е. потенциал электрического поля численно измеряется работой, совершаемой полем при перемещении единичного положительного пробного заряда ($q' = +1$) по любому пути из данной точки в бесконечность *).

Из (8.9) и (8.11) вытекает, что

$$\boxed{A_{1,2} = q'(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (8.13)$$

т. е. работа по перемещению заряда в электростатическом поле измеряется произведением величины переносимого заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути и не зависит от формы пути.

Размерность потенциала в гауссовой системе равна

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = \text{см}^{1/2} \cdot \text{сек}^{1/2} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Полагая в (8.13) $q' = 1 \text{ СГС}$ ед. заряда, $A_{1,2} = 1 \text{ эрг}$, мы получим $\varphi_1 - \varphi_2 = 1 \text{ СГС}$ ед. потенциала, иначе говоря, за единицу разности потенциалов в гауссовой системе принимается разность потенциалов между двумя такими точками поля, при перемещении между

трическими зарядами. Так, в рассмотренном в § 7 примере 2 безграничной заряженной плоскости бесконечно удаленные точки, лежащие справа и слева от плоскости и в самой плоскости, не равнозначны друг другу. В подобных случаях иногда бывает удобно выбирать иную нормировку константы в выражении для потенциальной энергии и полагать $W = 0$ в какой-нибудь условной точке поля.

*) Или в ту точку поля, для которой потенциал условно принят равным нулю, как указывалось в предыдущей сноской.

которыми 1СГС единицы положительного заряда совершаются работа в 1эр. В системе СИ, аналогично полагая в (8.13) $q' = 1\text{ к}$ и $A_{1,2} = 1\text{ дж}$, получим $\Phi_1 - \Phi_2 = 1\text{ в}$, т. е. 1 вольт есть разность потенциалов между такими двумя точками поля, при перемещении между которыми заряда в 1 кулон совершается работа в 1дюкуль. Так как $1\text{ дж} = 10^7\text{ эрг}$, а $1\text{ к} \approx 3 \cdot 10^9\text{ СГС}$ ед. заряда, то

$$1\text{ в} = \frac{1\text{ дж}}{1\text{ к}} = \frac{10^7\text{ эрг}}{3 \cdot 10^9\text{ СГС} \text{ед. заряда}} = \frac{1}{300} \text{ СГС ед. потенциала.}$$

Потенциал Φ является столь же важной характеристикой электрического поля, как и вектор напряженности E .

Для графического изображения распределения потенциала в электростатическом поле пользуются системой так называемых поверхностей равного потенциала (эквилиптенциальных поверхностей). Каждая такая поверхность представляет собой совокупность всех точек поля, имеющих одно и то же значение потенциала

$$\Phi = \text{const}. \quad (8.14)$$

Эти поверхности проводятся в пространстве так, чтобы численное значение потенциала на двух соседних поверхностях отличалось повсюду на одинаковую величину $\Delta\Phi$ (например, на 1 вольт).

В качестве примера рассмотрим потенциал поля точечного заряда q . Выше мы установили (см. (8.8)), что помещенный в это поле на расстоянии r от источника пробный заряд q' обладает потенциальной энергией $W = q' \frac{k_0 q}{\epsilon_0 \epsilon r}$.

Разделив обе части этого равенства на q' , мы получим искомое выражение для потенциала точечного заряда:

$$\frac{W}{q'} = \Phi_{т.з} = k_0 \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon r}. \quad (8.15)$$

В системе Гаусса

$$\Phi_{т.з} = \frac{q}{\epsilon r} \text{ СГС ед. потенциала}, \quad (8.15a)$$

и в системе СИ

$$\Phi_{т.з} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r} \text{ вольт.}$$

(8.15б)

Этот потенциал убывает обратно пропорционально расстоянию r от источника поля. Из (8.15) следует, что

$$\Phi_{т.з} = \text{const} \text{ при } r = \text{const},$$

т. е. поверхности равного потенциала будут концентрическими сферами, описанными вокруг источника поля на возрастающих расстояниях друг от друга, как это изображено на рис. 1.30.

Проведем на том же рис. 1.30 линии напряженности поля. Согласно (2.2) эти линии исходят из точечного заряда и направлены вдоль радиусов, т.е. перпендикулярны к поверхностям равного потенциала. Эта взаимная перпендикулярность линий поля и эквипотенциальных поверхностей остается справедливой и для сколь угодно сложных электростатических полей. Действительно, проведем в произвольном поле поверхность равного потенциала $\phi = \text{const}$ и рассмотрим две ее бесконечно близкие точки 1 и 2 (см. рис. 1.31). Переместим из 1 в 2 вдоль поверхности пробный заряд q' . Тогда согласно (8.13)

$$A_{1,2} = q'(\varphi_1 - \varphi_2) = q'(\varphi - \varphi) = 0, \quad (8.16)$$

т. е. работа перемещения пробного заряда вдоль поверхности равного потенциала равна нулю.

С другой стороны, выразим ту же работу через напряженность поля:

$$A_{1,2} = F dl \cos (\vec{F}, \vec{dl}) = q'E dl \cos (\vec{E}, \vec{dl}). \quad (8.17)$$

Сравнивая (8.16) и (8.17), видим, что так как q' и dl произвольны и не равны нулю, то, следовательно,

$$\cos (\vec{E}, \vec{dl}) = 0 \quad (8.18)$$

— вектор напряженности поля E перпендикулярен к поверхности равного потенциала в точке их пересечения.

Проведем теперь две бесконечно близкие эквипотенциальные поверхности $\phi = \text{const}$ и $\phi + d\phi = \text{const}$ (рис. 1.32). Как было доказано выше, вектор напряженности поля E направлен по нормали n к поверхности ϕ . Эта нормаль из точки 1 пересекает эквипотенциальную поверхность $\phi + d\phi = \text{const}$ в точке 2. Отрезок 1—2 имеет длину dn и представляет кратчайшее расстояние от точки 1 до второй эквипотенциальной поверхности. При перемещении пробного заряда q' из

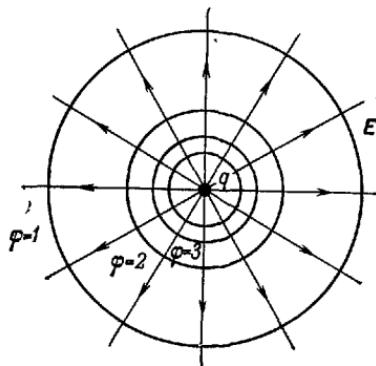


Рис. 1.30.

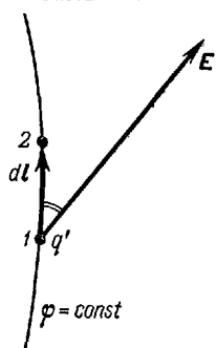


Рис. 1.31.

точки 1 перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности в точке 2 будет совершена работа dA , равная

$$dA = F dn \cos(\vec{F}, \vec{n}) = q'E dn. \quad (8.19)$$

Выражая с помощью (8.13) ту же работу через потенциалы, получим

$$dA = q' [\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -q'd\varphi. \quad (8.20)$$

Сравнивая (8.19) с (8.20), получим окончательно:

$$E = -\frac{d\varphi}{dn}. \quad (8.21)$$

Величина $\frac{d\varphi}{dn}$, характеризующая быстроту изменения потенциала в пространстве, носит название градиента потенциала.

Градиент есть вектор, направленный по нормали к поверхности. Знак минус в формуле (8.21) показывает, что вектор напряженности электрического поля численно равен градиенту потенциала, но направлен в противоположную сторону, т. е. в сторону падения потенциала.

Если мы проведем из точки 1 координатную ось, например ось x , то ее направление составит с нормалью некоторый угол α ; эта ось

пересечет поверхность $\varphi + d\varphi$ в некоторой точке 2'. Вычисляя работу на перемещении dx , получим

$$q'E_x dx = -q'd\varphi, \quad (8.22)$$

где $E_x = E \cos \alpha$ — проекция вектора E на направление оси x . Отсюда

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (8.23)$$

Результат этот очень важен: выбранная нами ось x может быть повернута в любом направлении. Поэтому формула (8.23) может читаться так: *составляющая вектора напряженности электрического поля в данной точке по любому направлению равна производной от потенциала по этому направлению в той же точке, взятой с отрицательным знаком.*

Пользуясь (8.23), можно, зная потенциал поля φ , найти вектор напряженности поля E , определив все три его составляющие E_x , E_y и E_z .

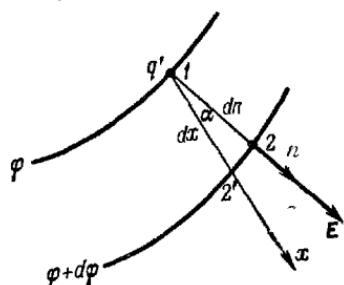


Рис. 1.32.

Действительно, для составляющих поля E_y и E_z имеем

$$\left. \begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ E_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

Выразим вектор \mathbf{E} через его составляющие:

$$\mathbf{E} = iE_x + jE_y + kE_z \quad (8.25)$$

Подставляя сюда значения составляющих (8.24), имеем

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(i \frac{\partial \Phi}{\partial x} + j \frac{\partial \Phi}{\partial y} + k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right).} \quad (8.26)$$

Следовательно, электрическое поле можно описать равным образом с помощью вектора напряженности \mathbf{E} или скалярного потенциала Φ , выражавшихся друг через друга с помощью соотношений (8.12) и (8.26).

Из (8.21) следует, что в системе СИ единица напряженности электрического поля имеет размерность вольт/метр. 1 в/м есть напряженность такого электрического поля, потенциал которого убывает на 1 вольт при перемещении на 1 метр перпендикулярно эквипотенциальной поверхности:

$$\boxed{1 \text{ в/м} = \frac{300}{100} = 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ СГС ед. напряженности.}}$$

Из (8.21) вытекает также, что в общем случае произвольного поля в тех его точках, где напряженность E больше, будут расположены гуще не только линии вектора \mathbf{E} , но и перпендикулярные к ним эквипотенциальные поверхности. Действительно, вблизи этих точек расстояния dn , на которых потенциал изменяется на одинаковую величину $d\Phi$, будут соответственно меньше, чем в точках с меньшими значениями отношения $\frac{d\Phi}{dn}$.

Для рассмотренного в предыдущем параграфе шара, равномерно заряженного по поверхности, поле вне шара имеет такое же значение, как у точечного заряда, сосредоточенного в центре шара. Отсюда можно заключить, что потенциал вне шара будет также выражаться формулой (8.15), справедливой для точечного заряда. Внутри же шара $E=0$, а следовательно, $\frac{d\Phi}{dn}=0$, и потенциал во всех этих точках постоянен ($\varphi=\text{const}$) и равен потенциальному на поверхности (при $r=R$). Таким образом, в этом случае

$$\boxed{\varphi = k_0 \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon r} \text{ при } r > R} \quad (8.27)$$

и

$$\boxed{\varphi = k_0 \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon R} \text{ при } r \leq R.} \quad (8.28)$$

График изменения E и Φ вне и внутри подобной равномерно заряженной сферы изображен на рис. 1.33.

Если известна напряженность поля во всех точках, то распределение потенциала Φ можно найти интегрированием равенства (8.21).

Рассмотрим пример подобного интегрирования.

Напряженность поля вне бесконечного плоского конденсатора, изображенного схематически на рис. 1.26, равна нулю. Следовательно, согласно (8.21) электрические потенциалы справа и слева от пластин будут постоянными. Однако численные значения этих постоянных Φ_1 и Φ_2 будут различны из-за наличия внутри конденсатора электрического поля, определяемого формулой (7.17).

Проведем ось x перпендикулярно к пластинам вправо и начало координат ($x=0$) поместим на левой положительно заряженной пластине. Перенесем пробный заряд $q'=+1$ вдоль оси от левой

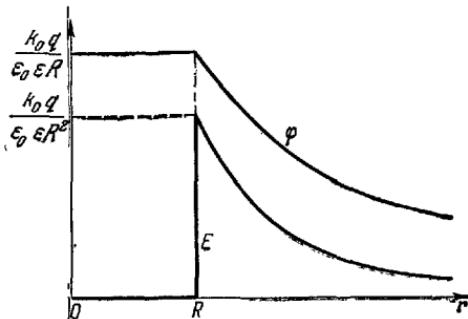


Рис. 1.33.

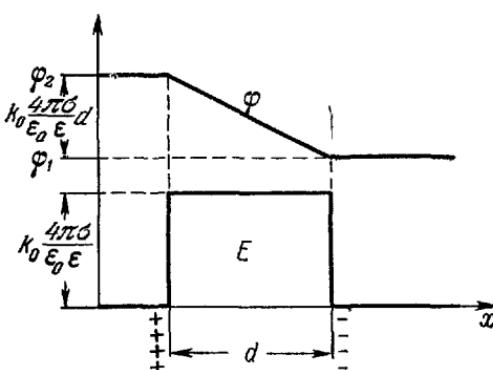


Рис. 1.34.

пластины с потенциалом Φ_1 на некоторое расстояние x внутрь конденсатора в точку, потенциал которой обозначим через $\Phi(x)$. Согласно (8.9) и (8.12) работа по переносу этого заряда определит разность потенциалов:

$$\Phi_1 - \Phi(x) = \int_{x=0}^x E_x dx = \int_0^x E dx = Ex, \quad (8.29)$$

и, следовательно, потенциал в точке x равен

$$\varphi(x) = \varphi_1 - Ex = \varphi_1 - \frac{k_0 4\pi\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} x. \quad (8.30)$$

Обозначим толщину конденсатора через d . Тогда потенциал правой обкладки будет равен

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{k_0 4\pi\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d \quad (8.31)$$

и разность потенциалов внутри конденсатора составит

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{k_0 4\pi\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d. \quad (8.32)$$

В данном случае начало отсчета φ может быть выбрано в любом месте, и для упрощения расчета можно положить равным нулю любое из значений φ_1 или φ_2 .

График изменения потенциала и напряженности электрического поля вне и внутри плоского конденсатора изображен на рис. 1.34.