двух диэлектриков остается непрерывной:

$$D_{n1}=D_{n2}. \tag{11.18}$$

Из (11.17) и (11.18) следует, что

$$\varepsilon_1 E_{n1}=\varepsilon_2 E_{n2}. \tag{11.19}$$

На рис. 1.49 изображен случай, когда $\varepsilon_2>\varepsilon_1$. При этом $E_{n2}<E_{n1}$ и линии вектора **E** при переходе через границу раздела преломляются, отклоняясь от перпендикуляра к границе раздела.

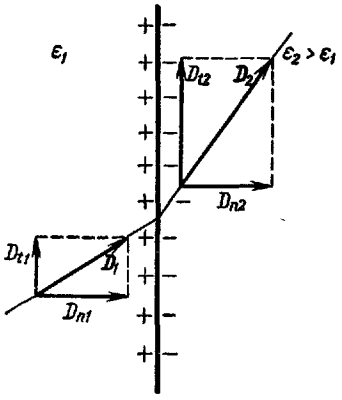

Рис. 1.50.

Из (11.16) и (11.17) следует, что

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_1}=\frac{D_{t2}}{\varepsilon_2} \tag{11.20}$$

при $\varepsilon_2>\varepsilon_1$ и $D_{t2}>D_{t1}$. При переходе через границу раздела из диэлектрика с меньшим значением ε в диэлектрик с большим значением ε нормальная составляющая вектора **D** остается неизменной, а касательная увеличивается, так что линии индукции преломляются под таким же углом, как и линии напряженности поля (см. рис. 1.50).

Таким образом, при переходе через границу раздела двух диэлектриков изменяется не только вектор напряженности электрического поля **E**, но и вектор электростатической индукции **D**. Однако поток индукции через произвольную площадку ΔS на границе раздела, равный по определению (5.11)

$$\Delta N=D_n\Delta S, \tag{11.21}$$

с обеих сторон поверхности на основании (11.18) остается неизменным. Следовательно, число линий индукции, переходящих через границу, не меняется. Поэтому теорема Гаусса (6.4) остается справедливой для вектора **D** в самом общем случае при наличии в поле диэлектриков любой формы и размеров.

§ 12. Электрическая емкость проводников

Зарядим уединенный проводник, сообщив ему некоторый заряд q. Этот заряд распределится по поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника равнялась нулю (см. § 9). Для нахождения электрического поля, создаваемого заряженным проводником в про-

извольной точке M вне его (см. рис. 1.51), применим принцип наложения (2.7). Тогда получим

$$\mathbf{E}_M = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i k_0 \frac{q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}, \qquad (12.1)$$

т. е. вектор напряженности электрического поля в точке M равен геометрической сумме полей, создаваемых в этой точке каждым из элементарных точечных зарядов q_i, на которые можно разбить весь заряд проводника.

Аналогичным образом вычисляется и электрический потенциал в точке M:

$$\varphi_M = \sum_i \varphi_i = \sum_i k_0 \frac{q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i}, \qquad (12.2)$$

т. е. как алгебраическая сумма потенциалов, создаваемых каждым из элементарных точечных зарядов.

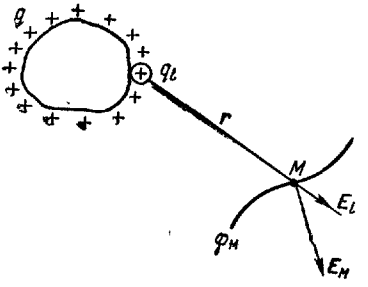

Рис. 1.51.

Поместим теперь на тот же проводник заряд q', в n раз больший первоначального, $q' = nq$. Чтобы поле внутри проводника вновь равнялось нулю, заряд q' должен распределиться по поверхности проводника подобно заряду q, т. е. все q_i' будут также в n раз больше соответствующих величин q_i.

Вычисляя потенциал в точке M, получим

$$\varphi_M' = \sum_i k_0 \frac{q_i'}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i} = \sum_i k_0 \frac{nq_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i} = n \sum_i k_0 \frac{q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i} = n\varphi_M, \qquad (12.3)$$

т. е. потенциал в каждой точке поля возрастает прямо пропорционально заряду проводника. Это утверждение, конечно, справедливо и для всех точек внутри и на поверхности проводника, потенциал которых одинаков (см. § 9). Обозначая потенциал самого проводника через φ, получим

$$q \sim \varphi. \qquad (12.4)$$

Вводя соответствующий коэффициент пропорциональности, перепишем (12.4) в виде

$$\boxed{q = C\varphi \text{ или } C = \frac{q}{\varphi}.} \qquad (12.5)$$

Коэффициент C называется электрической емкостью проводника. Изменим заряд проводника на Δq. Тогда его потенциал

возрастает на $\Delta\varphi$, так что

$$q+\Delta q=C(\varphi+\Delta\varphi). \tag{12.6}$$

Из (12.5) и (12.6) получаем, что

$$\Delta q=C\,\Delta\varphi, \tag{12.7}$$

и, следовательно,

$$\text{при } \Delta\varphi=1 \quad C=\Delta q. \tag{12.8}$$

Таким образом, *электроемкость проводника численно равна величине заряда, который нужно сообщить данному проводнику для увеличения его потенциала на единицу.*

Из формулы (12.5) можно определить размерность и установить единицы измерения электроемкости. В системе СГС

$$[C]=\frac{[q]}{[\varphi]}=\frac{г^{1/2}\cdot см^{3/2}\cdot сек^{-1}}{г^{1/2}\cdot см^{1/2}\cdot сек^{-1}}=см,$$

т. е. электроемкость имеет размерность длины и измеряется в сантиметрах.

В системе СИ за единицу электроемкости принимают емкость такого проводника, при сообщении которому заряда в 1 кулон его потенциал изменяется на 1 вольт. Эта единица называется фарадой (*ф* или F):

$$1ф=\frac{1\,к}{1\,в}=\frac{3\cdot10^{9}\text{ СГС ед. заряда}}{\frac{1}{300}\text{ СГС ед. потенциала}}=$$

$$=9\cdot10^{11}\text{ СГС ед. емкости } (см).$$

Так как фарада представляет собой крупную единицу, то на практике обычно пользуются ее миллионной долей, называемой микрофарадой: $1мкф=1\mu F=10^{-6}F=9\cdot10^{5}см$, или даже еще в миллион раз меньшей единицей, называемой микромикрофарадой или пикофарадой: $1пф=1мкмкф=1\mu\mu F=1pF=10^{-12}F=0{,}9\ см$.

Подсчитаем электроемкость уединенного сферического проводника. Из соображений симметрии очевидно, что сообщенный ему заряд распределится равномерно по поверхности проводника. Используя полученное для этого случая выше, в § 7 и § 8, решение, можно на основании (8.28) написать выражение для потенциала шара:

$$\boxed{\varphi=k_0\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon R},} \tag{12.9}$$

где R — радиус шара, q — его заряд и ε — диэлектрическая проницаемость окружающей проводник среды. Подставляя выражение

(12.9) в общую формулу для электроемкости (12.5), получаем

$$C_{\text{шара}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon R}{k_0}. \qquad (12.10)$$

Электроемкость шара прямо пропорциональна его радиусу и диэлектрической проницаемости окружающей среды. В системе СГС

$$C_{\text{шара}} = \varepsilon R \ \textit{см}. \qquad (12.10а)$$

В системе СИ

$$\boxed{C_{\text{шара}} = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R \ \textit{ф}.} \qquad (12.10б)$$

В формуле (12.10б) радиус шара измеряется в метрах и, следовательно, диэлектрическая проницаемость ε и ε_0 в этой системе измеряется в $\textit{ф}/\textit{м} = \textit{к}/\textit{в}\cdot\textit{м} = \textit{к}^2/\textit{дж}\cdot\textit{м} = \textit{к}^2/\textit{н}\cdot\textit{м}^2$, что совпадает с размерностью этой величины (2.10).

Земной шар является уединенным сферическим проводником с радиусом $R = 6400$ *км*. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды практически равна единице. По формулам (12.10) электроемкость Земли равна

$$C_з = 6{,}4\cdot 10^8 \ \textit{см} \approx 700 \ \textit{мкф}.$$

Уединенные проводники имеют обычно электроемкость C значительно меньше электроемкости Земли. Сообщая проводнику заряд q, мы повышаем его потенциал до значения φ.

Заземлим такой проводник, т. е. соединим его с Землей, потенциал которой будем условно считать равным нулю ($\varphi_з = 0$). Вследствие разности потенциалов заряд с проводника будет перетекать в Землю до тех пор, пока в обоих телах не установится один и тот же потенциал:

$$\varphi' = \frac{q'}{C} = \frac{q''}{C_з}, \qquad (12.11)$$

где q' — заряд, оставшийся на проводнике, а $q'' = q - q'$ — заряд, отданный Земле.

Из (12.11) следует, что

$$\frac{q'}{q''} = \frac{C}{C_з} \ll 1, \quad q' \ll q'' \approx q \quad \text{и} \quad \varphi' \ll \varphi, \qquad (12.12)$$

т. е. при заземлении проводника малой емкости практически весь его заряд перейдет в Землю, потенциал этого проводника будет равен потенциалу Земли, а последний изменится на практически ничтожную величину φ'. Таким образом, заземляя различные проводники, мы приводим их к одному и тому же потенциалу Земли, который условно принимаем за начало отсчета, т. е. $\varphi_з = 0$.

Вопрос о том, каков же «на самом деле» потенциал Земли, если за нуль считать потенциал точек, бесконечно удаленных от

поверхности Земли, не является при этом существенным. Вследствие непрерывно падающих на Землю потоков космических лучей (в основном положительно заряженных протонов) и корпускулярного излучения Солнца (в основном отрицательных электронов) суммарный заряд Земли $q_з$ может быть отличен от нуля и постепенно изменяться со временем. Лишь систематические измерения электрического поля за пределами атмосферы с помощью спутников Земли смогут определить $q_з$ и соответственно $\varphi_з = q_з/C_з$. Кроме того, существует определенная разность потенциалов между земным шаром и окружающей его атмосферой, обеспечивающая напряженность поля в непосредственной близости к поверхности Земли порядка 100 *в/м*. Однако наличие практически постоянного или медленно изменяющегося земного электрического поля не дает возможности наблюдателю, находящемуся на земной поверхности, определить абсолютный потенциал Земли (по отношению к бесконечно удаленным точкам). Измеряя же лишь разности потенциалов, мы можем выбирать начало отсчета φ произвольно и полагать, как указывалось выше, условно $\varphi_з = 0$.

Из приведенных соотношений и примеров следует, что *электроемкость уединенного проводника зависит от его геометрических размеров, формы и диэлектрических свойств окружающей среды и не зависит от величины заряда проводника.*

Если проводник не является уединенным, т. е. вблизи него находятся другие проводники, то, заряжаясь, он будет наводить на поверхности соседних проводников заряды обоих знаков (см. § 9). Эти индуктированные заряды будут создавать дополнительное поле и изменять потенциал заряжаемого проводника. В результате увеличение его потенциала $\Delta\varphi$ при сообщении некоторого заряда Δq будет зависеть от размеров и расположения окружающих проводников. Отношение $C = \Delta q/\Delta\varphi$ для электроемкости проводника зависит, следовательно, не только от формы и размеров заряжаемого проводника, но и от его расположения относительно остальных проводников.

Как было показано в §§ 9 и 10, дополнительные поля $\mathbf{E}'$ индуктируемых и поляризационных зарядов всегда направлены **против** поля источника $\mathbf{E}_0$. Поэтому при внесении в среду, окружающую заряженный проводник, других проводников и диэлектриков поле рассматриваемого проводника ослабляется, а его потенциал падает. В соответствии с (12.5) электроемкость проводника при этом возрастает по сравнению с емкостью того же проводника в вакууме в отсутствие других проводников и диэлектриков. Идя по этому пути, можно создавать приборы большой емкости, называемые **конденсаторами** (накопителями заряда).

Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), разделенных прослойкой диэлектрика. Приближая вторую обкладку к первой

и помещая между ними вещество с высокой диэлектрической проницаемостью ε, можно создать конденсаторы большой емкости и накапливать на их обкладках большие заряды при незначительной разности потенциалов и малых объемах системы. Практически очень важно, что электрическое поле конденсатора сосредоточивается почти целиком в узком зазоре между его обкладками, так что его электроемкость не зависит от наличия других проводников и диэлектриков вблизи конденсатора.

При приложении к конденсатору некоторой разности потенциалов его обкладки заряжаются равными по величине зарядами противоположных знаков. *Под электроемкостью конденсатора $C_к$ понимается отношение заряда одной из его обкладок q к разности потенциалов $\varphi_2-\varphi_1=U$ между обкладками:*

$$\boxed{C_к=\frac{q}{\varphi_2-\varphi_1}=\frac{q}{U}\,.} \qquad (12.13)$$

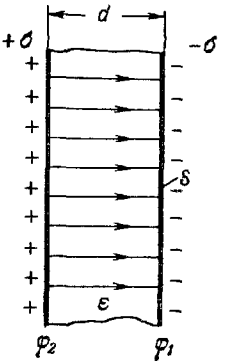

Рис. 1 52

Простейшей конструкцией конденсатора является плоский конденсатор, состоящий из двух проводящих плоских пластин (см. рис. 1.52), пространство между которыми заполнено диэлектриком с проницаемостью ε.

Когда линейные размеры l пластин велики по сравнению с расстоянием d между пластинами ($d \ll l$), можно пренебрегать краевыми эффектами и считать электрическое поле E внутри конденсатора практически однородным, а заряд q — распределенным по пластинам равномерно с поверхностной плотностью

$$\sigma=\frac{q}{S}\,. \qquad (12.14)$$

В этом случае напряженность электрического поля между пластинами согласно (7.17) равна

$$E=k_0\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}=k_0\frac{4\pi q}{\varepsilon_0\varepsilon\cdot S}\,. \qquad (12.15)$$

С другой стороны, пользуясь соотношением (8.21) между напряженностью поля и градиентом потенциала, для нашего случая однородного поля имеем

$$E=-\frac{d\varphi}{dn}=-\frac{\varphi_1-\varphi_2}{d}=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{d}=\frac{U}{d}\,. \qquad (12.16)$$

Сравнивая оба эти выражения для напряженности поля, получим

$$\frac{U}{d}=k_0\frac{4\pi q}{\varepsilon_0\varepsilon\cdot S}$$

или окончательно

$$\boxed{C_{\text{пл к}} = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot S}{k_0 \cdot 4\pi d}.} \tag{12.17}$$

В системе Гаусса $\varepsilon_0 = 1$, $k_0 = 1$ и

$$C_{\text{пл.к}} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \text{ см.} \tag{12.17а}$$

В системе СИ $k_0 = \frac{1}{4\pi}$ и

$$\boxed{C_{\text{пл.к}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \text{ ф.}} \tag{12.17б}$$

Как видно из (12.17), электроемкость плоского конденсатора зависит от его геометрических размеров (площади пластин S), от взаимного расположения проводников, т. е. от расстояния до соседней пластины d, и от диэлектрической проницаемости диэлектрика ε. Для увеличения емкости конденсатора следует увеличивать площадь пластин, уменьшать расстояние между ними и подбирать диэлектрическую прослойку с максимальным значением ε. Выбор диэлектрика, однако, ограничивает возможность уменьшения расстояния между пластинами d.

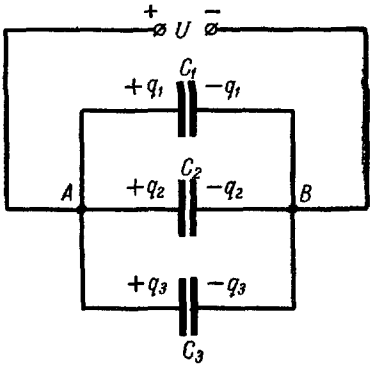

Рис. 1.53.

При сближении пластин конденсатора возрастает напряженность электрического поля $E = U/d$ в диэлектрической прослойке. В очень сильных полях (порядка 10^7 *в/м*) диэлектрик перестает быть изолятором. Для каждого диэлектрика имеется определенное максимально допустимое значение напряженности электрического поля $E_{\text{проб}}$, выше которого ток в диэлектрике сразу достигает очень больших значений и вызывает его разрушение, как говорят, **пробой** диэлектрика. Для предотвращения пробоя расстояние между пластинами не следует делать меньше некоторого минимального значения

$$d_{\text{мин}} = \frac{U}{E_{\text{проб}}}, \tag{12.18}$$

а при постоянном расстоянии между пластинами к конденсатору нельзя прикладывать разность потенциалов, превышающую некоторое максимальное значение

$$U_{\text{макс}} = d \cdot E_{\text{проб}}, \tag{12.19}$$

называемое **пробивным напряжением** данного конденсатора.

Для увеличения емкости конденсаторов C без сильного увеличения их линейных размеров конденсаторы соединяют параллельно в батарею. Для расчета емкости батареи при параллельном соединении конденсаторов рассмотрим схему такого соединения, изображенную на рис. 1.53. Пусть емкости соединяемых конденсаторов равны $C_1, C_2, \ldots, C_n$, а их заряды соответственно $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Разность потенциалов U, приложенная между точками A и B, одинакова для всех конденсаторов. Тогда, согласно (12.13), заряд каждого конденсатора равен:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \ldots, \quad q_n = C_n U. \tag{12.20}$$

Складывая эти равенства и замечая, что полный заряд системы $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$, получим

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n) U. \tag{12.21}$$

Полная электроемкость батареи конденсаторов $C_б$ равна отношению полного заряда системы q к приложенной разности потенциалов U:

$$\boxed{C_б = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_i C_i.} \tag{12.22}$$

При параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей включенных в батарею конденсаторов.

Для предотвращения пробоя системы прибегают к последовательному соединению конденсаторов (рис. 1.54). Если к концам батареи приложить разность потенциалов U, то крайние пластины системы зарядятся разноименными зарядами $\pm q$. Вследствие электростатической индукции на всех промежуточных пластинах наведутся заряды, также численно равные $\pm q$, как это показано на схеме.

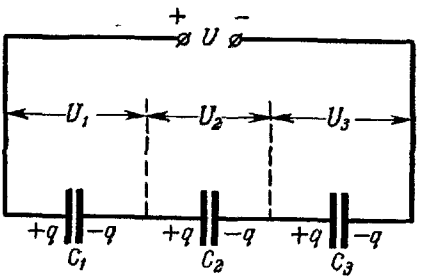

Рис. 1.54.

При этом полная разность потенциалов $U = \sum U_i$ распределится между конденсаторами соответственно их емкостям:

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \ldots, \quad U_n = \frac{q}{C_n}. \tag{12.23}$$

Складывая все эти равенства, получим

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right). \tag{12.24}$$

Отношение $U/q = 1/C_б$ есть величина, обратная электроемкости всей системы, и иногда называется ее потенциальным коэффициентом. Из (12.24) следует, что

$$\boxed{\frac{1}{C_б} = \frac{U}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_i \frac{1}{C_i},} \tag{12.25}$$

т. е. при последовательном соединении конденсаторов обратная величина емкости всей батареи равна сумме обратных величин емкостей соединенных в батарее конденсаторов. Легко также видеть, что

$$\frac{1}{C_б} = \sum_i \frac{1}{C_i} > \frac{1}{C_i} \quad \text{и} \quad C_б < C_i$$

— *при последовательном соединении конденсаторов электроемкость батареи меньше электроемкости каждого из конденсаторов.*

Однако при этом падение потенциала на каждом из конденсаторов $U_i < U$, и можно, не опасаясь пробоя, соединять в батарею конденсаторы с меньшими расстояниями d и большими емкостями.

§ 13. Энергия электрического поля

Сообщим уединенному проводнику некоторый заряд q. Тогда вокруг него возникнет электрическое поле и потенциал проводника примет значение $\varphi = q/C$. Чтобы увеличить заряд проводника на dq, придется принести этот заряд из бесконечности к поверхности проводника и затратить на это работу, равную

$$dA = (\varphi - \varphi_\infty)\, dq = \varphi\, dq = \frac{1}{C} q\, dq, \tag{13.1}$$

если считать $\varphi_\infty = 0$.

Эта работа совершается внешними силами, перемещающими заряд против сил электрического поля проводника. При обратном перемещении заряда dq с поверхности проводника в бесконечно удаленную точку силы электрического поля совершат точно такую же по величине работу dA. Следовательно, заряженный проводник обладает потенциальной энергией W, за счет которой совершается работа его разрядки.

При увеличении заряда проводника на dq его потенциальная энергия возрастает на величину dW, равную работе dA, совершенной внешними силами

$$\boxed{dW = dA = \frac{1}{C} q\, dq.} \tag{13.2}$$

Потенциальную энергию незаряженного проводника ($q = 0$ и $\varphi = 0$), не создающего вокруг себя электрического поля, будем считать