Отношение $U/q = 1/C_б$ есть величина, обратная электроемкости всей системы, и иногда называется ее потенциальным коэффициентом. Из (12.24) следует, что

$$\boxed{\frac{1}{C_б} = \frac{U}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_i \frac{1}{C_i},} \tag{12.25}$$

т. е. при последовательном соединении конденсаторов обратная величина емкости всей батареи равна сумме обратных величин емкостей соединенных в батарее конденсаторов. Легко также видеть, что

$$\frac{1}{C_б} = \sum_i \frac{1}{C_i} > \frac{1}{C_i} \quad \text{и} \quad C_б < C_i$$

— *при последовательном соединении конденсаторов электроемкость батареи меньше электроемкости каждого из конденсаторов.*

Однако при этом падение потенциала на каждом из конденсаторов $U_i < U$, и можно, не опасаясь пробоя, соединять в батарею конденсаторы с меньшими расстояниями $d$ и большими емкостями.

## § 13. Энергия электрического поля

Сообщим уединенному проводнику некоторый заряд $q$. Тогда вокруг него возникнет электрическое поле и потенциал проводника примет значение $\varphi = q/C$. Чтобы увеличить заряд проводника на $dq$, придется принести этот заряд из бесконечности к поверхности проводника и затратить на это работу, равную

$$dA = (\varphi - \varphi_\infty)\, dq = \varphi\, dq = \frac{1}{C} q\, dq, \tag{13.1}$$

если считать $\varphi_\infty = 0$.

Эта работа совершается внешними силами, перемещающими заряд против сил электрического поля проводника. При обратном перемещении заряда $dq$ с поверхности проводника в бесконечно удаленную точку силы электрического поля совершат точно такую же по величине работу $dA$. Следовательно, заряженный проводник обладает потенциальной энергией $W$, за счет которой совершается работа его разрядки.

При увеличении заряда проводника на $dq$ его потенциальная энергия возрастает на величину $dW$, равную работе $dA$, совершенной внешними силами

$$\boxed{dW = dA = \frac{1}{C} q\, dq.} \tag{13.2}$$

Потенциальную энергию незаряженного проводника ($q = 0$ и $\varphi = 0$), не создающего вокруг себя электрического поля, будем считать

равной нулю. Тогда энергия $W$ проводника, заряд которого достиг некоторой величины $q$, может быть найдена интегрированием выражения (13.2):

$$W=\int_0^W dW=\int_0^q \frac{1}{C}\,q\,dq=\frac{1}{C}\int_0^q q\,dq=\frac{1}{C}\,\frac{q^2}{2}. \qquad (13.3)$$

Используя зависимость (12.5), связывающую заряд проводника с его потенциалом, можно получить окончательное выражение для энергии заряженного проводника в виде

$$\boxed{W=\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}\,q\varphi=\frac{1}{2}\,C\varphi^2.} \qquad (13.4)$$

Как мы видели в § 9, внутри заряженного проводника электрическое поле отсутствует. В процессе зарядки проводника электрическое поле возникает в пространстве, окружающем проводник. Поэтому мы будем считать, что электростатическая энергия заряженного проводника локализована в окружающем его электрическом поле и распределена в последнем с различной объемной плотностью в соответствии с различной величиной напряженности поля $E$ на разных расстояниях от проводника.

Для нахождения связи между объемной плотностью энергии (энергией единицы объема) электрического поля и его напряженностью рассмотрим простейший случай однородного поля между пластинами плоского конденсатора.

Процесс зарядки такого конденсатора можно представить как последовательное перемещение бесконечно малых порций заряда $dq$ с одной пластины на другую, в результате чего одна из пластин будет заряжаться положительно, а другая — отрицательно и между ними будет возникать постепенно возрастающая разность потенциалов $U=q/C_к$. Повторяя ход вывода, приведенного выше для уединенного проводника, легко получить выражение для полной электростатической энергии заряженного конденсатора:

$$\boxed{W_к=\frac{q^2}{2C_к}=\frac{1}{2}\,qU=\frac{1}{2}\,C_к U^2,} \qquad (13.5)$$

совершенно аналогичное выражению (13.4).

Подставляя в (13.5) значения электроемкости и разности потенциалов в плоском конденсаторе (12.17) и (12.16), после преобразований получим

$$\boxed{W_{пл.к}=\frac{1}{2}\,C_к U^2=\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{k_0\cdot 4\pi d}\,E^2d^2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{k_0\cdot 8\pi}\,Sd=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{k_0\cdot 8\pi}\,V.} \qquad (13.6)$$

Здесь $E$ — напряженность электрического поля внутри конденсатора, а $V=Sd$ — его объем. Отсюда энергия единицы объема, или объемная

плотность энергии электрического поля

$$\boxed{W_0 = \frac{W}{V} = \frac{E^2}{k_0 \cdot 8\pi},} \tag{13.7}$$

оказывается прямо пропорциональной квадрату напряженности электрического поля.

В системе СГС

$$W_0 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \frac{эрг}{см^3}. \tag{13.7а}$$

В системе СИ

$$\boxed{W_0 = \frac{\varepsilon E^2}{2} \frac{дж}{м^3}.} \tag{13.7б}$$

Соотношение (13.7) выведено нами в простейшем случае однородного поля. Оно остается справедливым и для любых неоднородных полей, в которых напряженность поля $E$ и плотность энергии $W_0$ меняются от точки к точке.

Согласно закону пропорциональности массы и энергии (т. I, гл. II, § 9), если электростатическое поле обладает энергией, то каждый элемент его объема обладает массой. Масса единицы объема электростатического поля равна

$$\boxed{\varrho = \frac{W_0}{c^2},} \tag{13.8}$$

где $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек* — скорость распространения света в пустоте. При напряженности электрического поля в 3000 *в/см* = 10 СГС ед. напряженности из (13.7а) и (13.8) находим плотность массы такого поля:

$$\varrho = \frac{10^2}{8\pi \cdot 9 \cdot 10^{20}} \approx 4 \cdot 10^{-21} \frac{г}{см^3}.$$

Видно, что она очень мала даже по сравнению с плотностью весьма разреженного газа (при $p = 10^{-6}$ *мм* рт. ст. имеем $\varrho_{газа} \approx 10^{-12}$ *г/см*$^3$).

С другими свойствами электрического и магнитного полей, более детально подтверждающими современные взгляды, что эти поля представляют собой особую форму материи, непрерывно распределенной в пространстве, мы познакомимся в дальнейших разделах курса.

Из выражения для энергии $W$ системы заряженных тел можно определить величину механических (пондеромоторных) сил $F$, действующих между этими телами. Пусть энергия системы заряженных и поляризованных тел $W$ зависит от какого-либо параметра $x$, например от размеров или координат одного из тел. Изменим этот параметр на величину $dx$, например, переместив данное тело. Тогда действующая в системе сила $F_x$ совершит работу

$$dA = F_x dx \tag{13.9}$$

за счет уменьшения потенциальной энергии системы, т. е.

$$F_x\,dx = -\,dW, \quad F_x = -\frac{dW}{dx}. \tag{13.10}$$

Рассмотрим конкретный пример плоского конденсатора с площадью пластин $S$ и расстоянием между ними $x$. Энергия этого конденсатора согласно (13.5) и (12.17) равна

$$W = \frac{q^2}{2C_к} = k_0 \cdot 2\pi \frac{q^2}{\varepsilon_0 \varepsilon\, S} x = k_0 \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} Sx \tag{13.11}$$

и при постоянных зарядах на пластинах ($q = \text{const}$) прямо пропорциональна расстоянию между пластинами $x$. Подставляя в (13.10) значение $W$ и производя дифференцирование, получим искомую силу

$$\boxed{F_x = -\frac{dW}{dx} = -k_0 \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} S.} \tag{13.12}$$

Знак минус указывает, что эта сила направлена против увеличения $x$, т. е. является силой притяжения. Таким образом, (13.11) приводит к тому же выражению для силы притяжения на единицу площади пластин $f = F_x/S$, что и полученное ранее (7.20).

Поскольку электростатическое поле неразрывно связано с электрическими зарядами, то энергию поля $W$ можно также рассматривать как энергию взаимодействия зарядов. В случае двух точечных зарядов $q_i$ и $q_j$, находящихся в пустоте на расстоянии $r_{ij}$ друг от друга, согласно (8.8) энергия их взаимодействия равна

$$W_{ij} = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \tag{13.13}$$

Если в пространстве имеется $N$ различных точечных зарядов ($i, j = 1, 2, 3, \ldots, N$), то полная потенциальная энергия системы $W$ будет равна сумме взаимных энергий всех пар зарядов, входящих в систему:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \tag{13.14}$$

Множитель $^1/_2$ в этом выражении нужен потому, что при суммировании по всем $i$ и $j$ от 1 до $N$ каждое взаимодействие учитывается дважды. Например, энергия взаимодействия зарядов $q_2$ и $q_3$ входит под знаком суммы в (13.14) два раза: один раз как $\frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$ при $i = 2$ и $j = 3$ и второй раз как $\frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_3 q_2}{r_{32}}$ при $i = 3$ и $j = 2$. В каждом из членов значки $i$ и $j$ разные ($i \neq j$): члены с $i = j$ не учитываются, так как они соответствуют самодействию зарядов, которое для принятых нами точечных зарядов равно бесконечности ($r_{ii} = 0$).

Рассмотрим случай, когда заряд $q$ распределен равномерно по поверхности сферы радиуса $R$. Для вычисления энергии такой системы проще всего воспользоваться формулой (13.3). Поскольку электроемкость шара $C$ численно равна его радиусу $R$ (в системе СГС), то

$$W_{\text{шара}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{R}. \tag{13.15}$$

С другой стороны, согласно (7.5а) напряженность электрического поля вне заряженной сферы равна

$$E=\frac{q}{r^2}.$$

По (13.7) находим плотность энергии в окружающем пространстве:

$$\boxed{W_0=\frac{E^2}{8\pi}=\frac{q^2}{8\pi r^4}}.$$

Разобьем это пространство на бесконечно тонкие сферические слои радиуса $r$ и толщины $dr$. Поверхность такого слоя равна $4\pi r^2$, а объем

$$dV=4\pi r^2\,dr.$$

Энергия электрического поля, заключенная в этом объеме, равна

$$dW=W_0\,dV=\frac{q^2}{8\pi r^4}\,4\pi r^2\,dr=\frac{q^2}{2}\frac{dr}{r^2}. \qquad (13.16)$$

Поскольку внутри сферы ($r<R$) поле отсутствует, для нахождения полной энергии поля надо проинтегрировать (13.16) в пределах от $r=R$ до $r=\infty$:

$$\boxed{W=\int dW=\frac{q^2}{2}\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{q^2}{2R}}$$

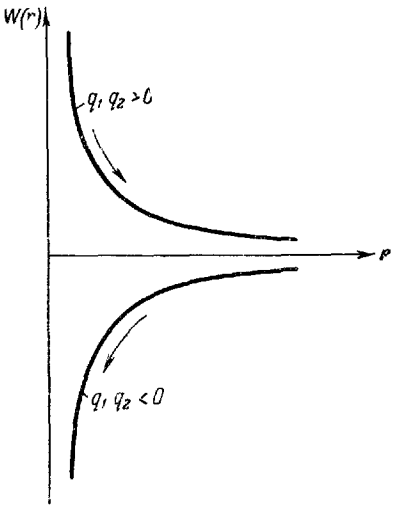


Рис. 1.55.

Полученный результат, естественно, совпадает с формулой (13.15), выведенной другим путем. К тому же выражению мы бы пришли, если бы мысленно разбили заряд $q$ на бесконечно малые порции и подсчитали полную энергию парных взаимодействий по формуле (13.14).

Если заряд $q$ распределен не только на поверхности, но и в объеме сферы, то поле внутри нее уже не равно нулю. Это вызывает увеличение энергии системы сверх (13.15). Если заряд $q$ распределен равномерно по всему объему шара радиуса $R$, то полная энергия системы равна (вычислений мы не приводим)

$$\boxed{W_{\text{шара}}=\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}}. \qquad (13.17)$$

Используя выражения для энергии взаимодействия точечных зарядов (13.13) и (13.14), можно проанализировать вопрос об устойчивости системы неподвижных электрических зарядов. Мы уже неоднократно отмечали то обстоятельство, что любое вещество построено из электрически заряженных частиц. Естественно возникает вопрос о том, возможны ли такие конфигурации неподвижных друг относительно друга заряженных частиц, которые представляли бы собой атомы, молекулы и т. д. Подчеркнем, что речь идет об устойчивости системы под действием одних только электростатических сил. Полученный результат будет справедлив для любого — дискретного или непрерывного — распределения зарядов.

Неустойчивость системы из двух точечных зарядов очевидна Одноименные заряды отталкиваются до бесконечности, а разноименные — притягиваются до полного соприкосновения и нейтрализуются На рис. 1.55 изображен график зависимости потенциальной энергии этой системы от расстояния:

$$\boxed{W(r)=\frac{q_1q_2}{r},}$$

как для одноименных ($q_1q_2>0$), так и разноименных ($q_1q_2<0$) зарядов. В обоих случаях взаимодействие стремится уменьшить потенциальную энергию системы Для одноименных зарядов $W_{мин}=0$ при $r=\infty$, а для разноименных $W_{мин}=-\infty$ при $r=0$. Условием устойчивого равновесия любой системы является минимум ее потенциальной энергии. Для рассмотренной системы двух точечных зарядов этот минимум наступает лишь при полном разрушении системы (разведении одноименных зарядов на бесконечность или полном слиянии разноименных зарядов).

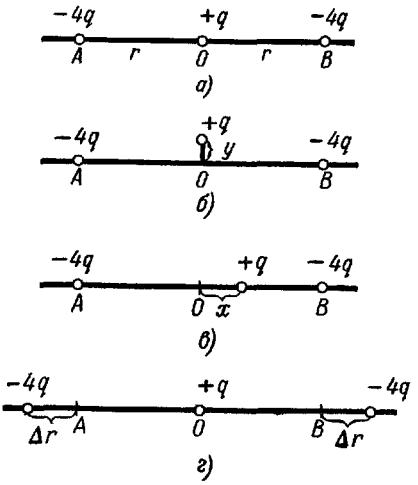


Рис. 1.56.

Рассмотрим систему из трех точечных зарядов. В этом случае возможны конфигурации, при которых все три заряда находятся в равновесии, однако это равновесие будет неустойчивым. Подобное равновесие будет возможным, если: 1) все заряды не одного и того же знака, 2) заряды расположены вдоль одной прямой, 3) величины зарядов находятся в определенном соотношении

Проведем через положительный заряд $+q$ прямую линию и расположим на ней на равных расстояниях $r$ по обе стороны заряда $+q$ два одинаковых отрицательных заряда $-q'$. Заряд $q$ тогда будет находиться в равновесии. Чтобы заряд $-q'$ также находился в равновесии, сила притяжения его к заряду $q$ должна уравновешиваться силой отталкивания другого заряда $-q'$, т. е.

$$\frac{qq'}{r^2}=\frac{(q')^2}{(2r)^2},$$

откуда $q'=4q$ (см. рис. 1.56, *а*).

Полная энергия взаимодействия этих зарядов, находящихся в равновесии, будет равна

$$W_1=\frac{(q')^2}{2r}-\frac{qq'}{r}-\frac{qq'}{r}=\frac{16q^2}{2r}-2\frac{4q^2}{r}=0, \qquad (13.18)$$

т. е , как и следовало ожидать, не зависит от $r$.

Для выяснения, является ли данное положение равновесия устойчивым, рассмотрим изменение величины $W$ при различных смещениях составляющих систему зарядов из равновесного положения.

Дадим центральному заряду $+q$ смещение $y$, перпендикулярное оси системы (рис. 1 56, *б*) Полная энергия тогда будет равна

$$W(y)=\frac{8q^2}{r}-\frac{8q^2}{\sqrt{r^2+y^2}}>0,$$

т. е. больше, чем в положении равновесия. На заряд $+q$ будет действовать сила, направленная к положению равновесия. По отношению к подобному смещению исходное равновесие оказывается устойчивым.

Дадим теперь центральному заряду $+q$ смещение $x$ вдоль оси системы (рис. 1.56, *в*) и подсчитаем полную энергию в этом случае:

$$W(x)=\frac{8q^2}{r}-\frac{4q^2}{r+x}-\frac{4q^2}{r-x}=\frac{8q^2}{r}-\frac{8q^2r}{r^2-x^2}=-\frac{8q^2x^2}{r(r^2-x^2)}<0.$$

При таком смещении потенциальная энергия уменьшается и по отношению к нему исходное равновесие оказывается неустойчивым. На сместившийся заряд в этом случае действует сила, стремящаяся еще более удалить его от положения равновесия.

Оставим теперь центральный заряд $+q$ на месте и дадим обоим отрицательным зарядам $-4q$ одинаковые смещения $\Delta r$ в разные стороны (рис. 1.56, *г*). Поскольку $W_1$ не зависит от $r$, то $W(\Delta r)=0$, и при таком смещении потенциальная энергия не изменяется вовсе. По отношению к подобному перемещению равновесие системы оказывается безразличным.

Испытывая различные другие изменения конфигурации зарядов, можно убедиться, что среди них имеются такие, при которых изменение потенциальной энергии $\Delta W=W-W_1$ либо положительно, либо отрицательно, либо равно нулю. Однако *если хотя бы при каком-либо одном типе изменения конфигурации потенциальная энергия ее уменьшается* (а такой случай — при $x\neq 0$ — мы уже разобрали), *то это изменение будет возрастать и исходное равновесие в целом неустойчиво.*

Анализируя выражение (13.14) в общем виде, можно доказать так называемую теорему Иншоу: *устойчивое статическое распределение электрических зарядов невозможно.*

Поскольку любое пространственное распределение зарядов может быть представлено в виде системы бесконечно большого числа бесконечно малых зарядов, то все сказанное относится к любой статической системе. Следовательно, устойчивая статическая система зарядов возможна лишь в том случае, если, кроме электрических сил, в ней действуют еще другие силы неэлектрической природы.

В случае атомных систем между электронами и ядрами, кроме кулоновых сил, действуют еще силы тяготения. Однако эти силы изменяются с расстоянием по такому же закону, а по абсолютной величине ничтожно малы по сравнению с электростатическими.

Таким образом, электроны, входящие в атомы и молекулы, не могут образовать устойчивые статические системы. Атомы и молекулы не могут быть не чем иным, как динамическими системами электрических зарядов. Этот факт является прекрасной иллюстрацией положения диалектического материализма о невозможности существования материи без движения.