§ 17. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

В разветвленных электрических цепях вычисление токов, идущих по отдельным ветвям, представляет известные трудности. Для упрощения этих вычислений удобно воспользоваться двумя правилами Кирхгофа.

Для вывода правил Кирхгофа рассмотрим изображенную на рис. 2.10 произвольную разветвленную цепь, состоящую из ряда соединенных друг с другом проводников с определенными сопротивлениями и ряда источников э. д. с.

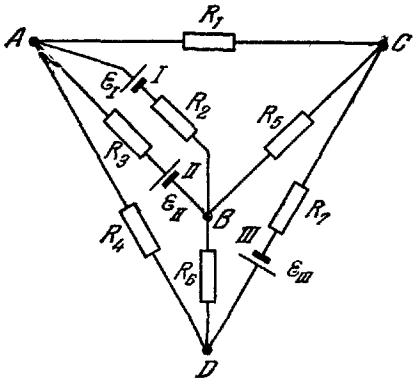

Рис. 2.10.

Назовем узлами все точки, в которых сходится не менее трех проводников нашей цепи, и обозначим их через A, B, C, D. Обратим внимание на то, что согласно приведенному определению точки I, II, III не являются узлами. На всем участке AIB между узлами A и B, состоящем из последовательно соединенных проводников и источника э. д. с., идет один и тот же ток.

Перенумеруем все участки нашей цепи, расположенные между узлами цепи, последовательными цифрами 1, 2, ..., 7. Суммарные сопротивления проводников и источников тока на каждом участке обозначим соответственно через R_1, R_2, ..., R_7. Величины электродвижущих сил, включенных на некоторых участках цепи, обозначим через $\mathscr{E}_I$, $\mathscr{E}_{II}$, $\mathscr{E}_{III}$.

При замыкании цепи через каждый участок пойдет определенный постоянный ток. Перенумеруем эти токи I_1, I_2, ..., I_7, как и сопротивления соответствующих участков. Задача состоит в том, чтобы рассчитать величину и направление каждого из этих токов по известным сопротивлениям участков и э. д. с. источников тока.

Подойдем к решению поставленной задачи алгебраически и охарактеризуем направления идущих через участки цепи токов их знаками. Поскольку до окончательного решения задачи эти знаки заранее не известны, то отметим на рис. 2.10 направления всех токов произвольно. Если при этом направление тока указано правильно, то мы получим в ответе для него положительную величину. Если же ответ окажется отрицательным, то, значит, ток течет в направлении, обратном предположенному.

Договорившись об обозначениях и направлениях токов, приступим к выводу первого правила Кирхгофа. Рассмотрим какой-либо

из узлов цепи, например узел A, изображенный отдельно на рис. 2.11. Из чертежа видно, что токи I_2, I_3 и I_4 направлены к узлу и за время dt приносят в этот узел суммарный заряд $(I_2+I_3+I_4)\,dt$. Ток I_1 направлен от узла и уносит за то же время заряд $I_1 dt$. Полное увеличение заряда в узле A за произвольный промежуток времени dt равно

$$dQ_A=-I_1\,dt+(I_2+I_3+I_4)\,dt=(-I_1+I_2+I_3+I_4)\,dt.$$

В цепи постоянного тока потенциалы всех точек цепи, а значит и узлов, должны оставаться неизменными. Следовательно, в этих узлах не могут накапливаться электрические заряды ни положительного, ни отрицательного знака. В частности, для узла A величина dQ_A должна равняться нулю для любого промежутка времени dt, т. е.

$$-I_1+I_2+I_3+I_4=0. \qquad (17.1)$$

Аналогичные уравнения можем выписать для всех узлов цепи. Таким образом, мы получаем систему уравнений, выражающих первое правило Кирхгофа:

алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k=0. \qquad (17.2)$$

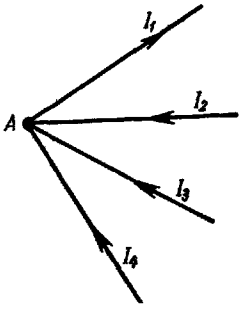

Рис. 2.11.

При этом надо соблюдать следующее правило знаков: токи, приходящие к узлу, считать положительными, а уходящие — отрицательными.

Выпишем соответствующие уравнения для узлов B и C:

$$-I_2-I_2-I_5+I_6=0 \qquad (17.3)$$

и

$$I_1+I_5-I_7=0. \qquad (17.4)$$

Сопоставляя их с (17.1), видим, что в уравнение (17.3) входят величины токов I_5 и I_6, не входившие в (17.1), а в уравнении (17.4) участвует величина тока I_7, не входившая в оба предыдущих уравнения (17.1) и (17.3). Благодаря такой структуре эти три уравнения являются независимыми друг от друга.

Если мы теперь захотим использовать аналогичное уравнение для узла D:

$$-I_4-I_6+I_7=0, \qquad (17.5)$$

то обнаружим, что в этом уравнении нет ни одной новой величины тока, которая бы уже не входила в какое-либо из предыдущих

трех уравнений, и что (17.5) не является новым независимым уравнением. Легко убедиться, что, складывая почленно все четыре уравнения (17.1), (17.3), (17.4) и (17.5), мы получим просто тождество: $0=0$.

Число неизвестных токов равно числу участков цепи. Количество узлов цепи меньше числа участков. Число же независимых уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа, меньше числа узлов, а следовательно, и числа неизвестных токов. Поэтому для определения всех неизвестных величин необходимо составить ряд дополнительных уравнений. Для этого служит второе правило Кирхгофа.

Рассмотрим произвольно выбранный замкнутый контур, например, $ABIA$. Обозначим потенциалы узлов A и B (см. рис. 2.10) соответственно через φ_A и φ_B и условимся о положительном направлении обхода, например, по часовой стрелке. В ветви BA ток I_3 идет по направлению обхода и должен считаться положительным. Э. д. с. $\mathscr{E}_{II}$ обусловливает ток в направлении обхода по контуру и также должна считаться положительной. Падение потенциала U_{BA} на участке BA равно разности потенциалов конечной и начальной точек. Полное сопротивление всего участка (включая и внутреннее сопротивление источника тока) обозначено через R_3. Согласно (16.6) закон Ома для этого участка цепи, содержащего э. д. с., имеет вид

$$I_3R_3=\mathscr{E}_{II}+\varphi_B-\varphi_A. \tag{17.6}$$

Во второй ветви AIB ток I_2 идет против направления обхода и э. д. с. $\mathscr{E}_I$ действует в том же направлении. Поэтому обе эти величины должны учитываться с отрицательным знаком. Закон Ома для участка цепи AB имеет вид

$$-I_2R_2=-\mathscr{E}_I+\varphi_A-\varphi_B. \tag{17.7}$$

Складывая почленно равенства (17.6) и (17.7), мы исключим неизвестные потенциалы узлов и получим

$$-I_2R_2+I_3R_3=-\mathscr{E}_I+\mathscr{E}_{II}. \tag{17.8}$$

Это уравнение выражает второе правило Кирхгофа для замкнутого контура $ABIA$:

алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления в ветвях замкнутого контура равна алгебраической сумме э. д. с., встречающихся в этом контуре:

$$\sum_k I_kR_k=\sum_l \mathscr{E}_l. \tag{17.9}$$

При этом также следует строго придерживаться правила знаков: токи, идущие вдоль выбранного нами направления обхода (в дан-

ном случае по часовой стрелке), считаются положительными, а идущие против направления обхода — отрицательными. Соответственно этому э. д. с., которые действуют по выбранному направлению обхода в контуре, считаются положительными, а против направления обхода — отрицательными. Уравнение (17.9) является обобщением закона Ома для замкнутой цепи (16.7) и показывает, что при обходе вокруг любого замкнутого контура мы возвращаемся в ту же самую точку с тем же значением потенциала.

Пользуясь вторым правилом Кирхгофа, следует составить аналогичные уравнения для всех независимых замкнутых контуров, входящих в разветвленную цепь. Говоря о независимых контурах, мы имеем ввиду следующее: составим уравнение второго правила Кирхгофа для контура *ABDA*:

$$-I_3R_3-I_6R_6+I_4R_4=-\mathscr{E}_{II}. \qquad (17.10)$$

Этот контур содержит, по сравнению с предыдущим контуром *ABIA*, два новых тока I_4 и I_6, и уравнение (17.10) является независимым от (17.8).

Если, однако, мы теперь составим уравнение второго правила Кирхгофа для контура *AIBDA*:

$$-I_2R_2-I_6R_6+I_4R_4=-\mathscr{E}_I, \qquad (17.11)$$

то увидим, что этот контур не включает ни одного нового элемента (тока или э. д. с.), который бы не входил в предыдущие два контура. Поэтому уравнение (17.11) не является новым, независимым от двух предыдущих — (17.8) и (17.10). Нетрудно убедиться, что оно автоматически получается, если почленно сложить эти два уравнения: (17.8) + (17.10) = (17.11).

Поэтому при составлении уравнений для второго правила Кирхгофа (так же, как и для первого) следует внимательно следить, чтобы каждый новый рассматриваемый контур содержал хотя бы один элемент, который не содержится в предыдущих контурах. Если это условие не будет соблюдено, ошибки не произойдет, но вычисления усложнятся, так как мы получим лишние уравнения, являющиеся простой комбинацией уже составленных.

Совокупность независимых уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа для узлов и по второму — для контуров, оказывается достаточной, чтобы найти все (или интересующие нас) токи в разветвленной цепи. Задача сводится, таким образом, к решению системы линейных уравнений, общее число которых равно числу неизвестных токов.

Применим правила Кирхгофа к цепи, состоящей из сопротивлений $R_1, R_2, \ldots, R_n$, включенных параллельно друг другу (рис. 2.12) и замкнутых на общий источник тока с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r.

Первое правило Кирхгофа в применении к узлу A дает

$$I - I_1 - I_2 - \ldots - I_n = 0, \quad \text{или} \quad I = \sum_{k=1}^{k=n} I_k. \tag{17.12}$$

Уравнение для узла B составлять нет необходимости, так как к нему примыкают те же элементы контура.

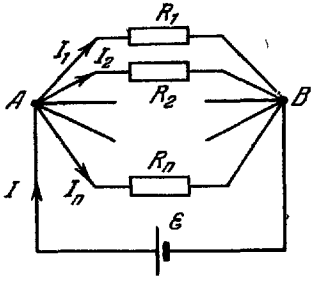

Рис. 2.12.

Для замкнутых контуров, проходящих через каждое отдельное сопротивление и э. д. с., согласно второму правилу Кирхгофа имеем

$$\left.\begin{aligned} I_1R_1 &= \mathcal{E} - Ir, \\ I_2R_2 &= \mathcal{E} - Ir, \\ &\ldots\ldots \\ I_nR_n &= \mathcal{E} - Ir. \end{aligned}\right\} \tag{17.13}$$

Определяя отсюда токи $I_1, I_2, \ldots, I_n$ и подставляя их в (17.12), получим

$$I = (\mathcal{E} - Ir) \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{R_k}.$$

Решая полученное уравнение относительно тока I, находим

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + \dfrac{1}{\sum\limits_k \dfrac{1}{R_k}}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{полн}}}. \tag{17.14}$$

Как видно из (17.14), полное сопротивление всей цепи $R_{\text{полн}}$ является суммой сопротивления источника r и суммарного сопротивления включенной последовательно с ним системы из соединенных параллельно друг другу проводников R. Последнее определяется из соотношения

$$R = \frac{1}{\sum\limits_k \dfrac{1}{R_k}}, \text{ или } \frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}, \tag{17.15}$$

показывающего, что при параллельном соединении проводников величина, обратная сопротивлению всей системы (т. е. ее проводимость), равна сумме проводимостей всех проводников.

Полное же сопротивление всей цепи находится по правилу сложения сопротивлений для последовательного соединения:

$$R_{\text{полн}} = r + R. \tag{17.16}$$

В качестве второго примера применения правил Кирхгофа рассмотрим схему так называемого измерительного мостика Уитстона. Четыре сопротивления R_1, R_2, R_3 и R_4 образуют его плечи. В одну диагональ AC моста включена батарея с э. д. с. $\mathscr{E}$ и сопротивлением $R_б$. В другую диагональ BD включен гальванометр с сопротивлением $R_г$ (рис. 2.13).

Уравнения первого правила Кирхгофа для узлов A, B и C имеют вид

$$\left.\begin{aligned} I_б - I_1 - I_3 &= 0, \\ I_1 - I_2 - I_г &= 0, \\ I_2 + I_4 - I_б &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.17)$$

Легко видеть, что уравнение для узла D ничего нового не дает.

Уравнения второго правила Кирхгофа для независимых контуров $ABC\mathscr{E}A$, $ABDA$ и $BCDB$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} I_б R_б + I_1 R_1 + I_2 R_2 &= \mathscr{E}, \\ I_1 R_1 + I_г R_г - I_3 R_3 &= 0, \\ I_2 R_2 - I_4 R_4 - I_г R_г &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.18)$$

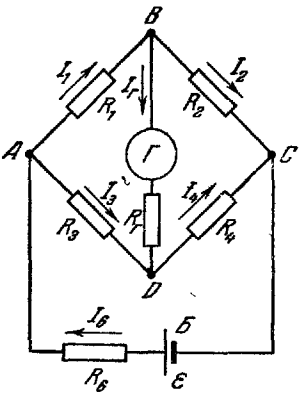

Рис. 2.13.

Из шести уравнений (17.17) и (17.18) можно определить шесть неизвестных. Если заданы все сопротивления и э. д. с., то такими неизвестными будут токи, текущие в цепи. Если какое-либо из сопротивлений, например R_1, неизвестно, то на опыте измеряют ток $I_г$, идущий через гальванометр, и из уравнений (17.17) и (17.18) вычисляют остальные пять неизвестных токов и величину R_1. Такая схема носит название неравновесного мостика Уитстона.

Изменяя известные сопротивления R_2, R_3 или R_4, можно добиться такого положения, чтобы ток через гальванометр обратился в нуль ($I_г = 0$). Тогда из уравнений (17.17) находим

$$I_1 = I_2 \text{ и } I_3 = I_4,$$

а из уравнений (17.18) получим

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \text{ и } I_3 R_3 = I_4 R_4.$$

Отсюда легко вывести, что

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}, \quad \text{или} \quad R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \qquad (17.19)$$

Равенство (17.19) показывает, что для определения искомого сопротивления R_1 в случае равновесного моста достаточно знать лишь величину сопротивления R_2 и отношение сопротивлений R_3/R_4. Э. д. с. батареи, питающей мост, и сопротивления батареи и гальванометра существенной роли для определения искомого сопротивления R_1 не играют.

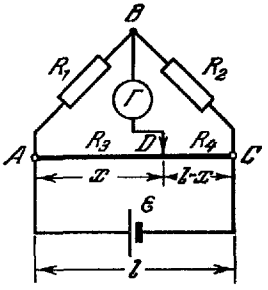

Рис. 2.14.

В часто применяющемся на практике реохордном мостике Уитстона (рис. 2.14) сопротивления R_3 и R_4 представляют собой одну калиброванную проволоку (реохорд). Контакт гальванометра с реохордом (точка D) делается подвижным, и в момент равновесия моста измеряется положение движка на шкале, расположенной параллельно реохорду. В этом случае отношение сопротивлений R_3/R_4 равно отношению длин обоих участков реохорда и

$$R_1 = R_2 \frac{x}{l-x}. \qquad (17.20)$$

В измерительной технике используется и неравновесный мостик Уитстона. В конце § 15 упоминался электрический тензометр. В качестве таких тензометров применяются тонкие константановые проволочки с сопротивлением 50—200 *ом*, наклеенные на изолирующую пленку (рис. 2.15). Для компенсации внешних температурных воздействий в плечи моста (рис. 2.13) включаются два одинаковых тензометра с равными сопротивлениями:

$$R_1 = R_2 = r. \qquad (17.21)$$

Один из тензометров наклеивается на деформирующуюся деталь, а второй остается свободным. Добиваются равенства тока в гальванометре нулю в отсутствие деформации. Из условия (17.19) для равновесного моста и (17.21) находим, что

$$R_3 = R_4 = R. \qquad (17.22)$$

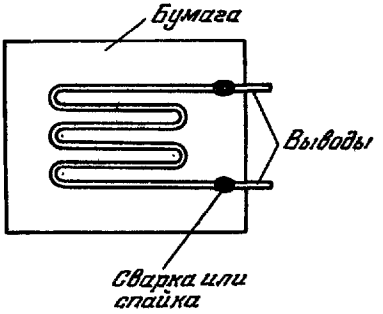

Рис. 2.15.

При деформации детали и приклеенного к ней тензометра сопротивление последнего изменяется на некоторую величину Δr. Тогда

$$R_1 = r + \Delta r \quad \text{и} \quad R_2 = r. \qquad (17.23)$$

Подставляя значения сопротивлений (17.22) и (17.23) в уравнения (17.17) и (17.18) и решая эту систему с точностью до малых второго порядка относительно Δr, после несложных, но громоздких преобразований находим

$$I_г = -\frac{\mathcal{E}R}{(r+R)(R_б r + R_б R + 2rR)}\,\Delta r. \qquad (17.24)$$

Измеряя ток $I_г$ в диагонали неравновесного моста, можно найти абсолютное (Δr) и относительное ($\Delta r/r$) изменение сопротивления тензометра и отградуировать $I_г$ непосредственно в единицах деформации детали или приложенного к ней напряжения.

Для измерения с помощью тензометров быстропеременных деформаций и напряжений гальванометр в диагонали моста заменяют специальным записывающим электрическим прибором — шлейфовым осциллографом. Ввиду малости возникающих в диагонали напряжений $U_г = I_г R_г$ они предварительно усиливаются.

§ 18. Работа, мощность и тепловое действие тока

Рассмотрим участок цепи, не содержащий э. д. с. (рис. 2.16, *а*). На этом участке приложена разность потенциалов $U_{1,2}$ и идет ток I. За некоторый промежуток времени t через участок пройдет заряд $q = It$. При этом силы электрического поля совершат работу по переносу заряда q от точки с более высоким к точке с более низким потенциалом:

$$A = (\varphi_1 - \varphi_2)\, q = U_{1,2} It. \qquad (18.1)$$

В соответствии с законом Ома (15.3) эту работу можно выразить через сопротивление участка R:

$$A = IU_{1,2} t = I^2 R t = \frac{U_{1,2}^2}{R}\, t. \qquad (18.2)$$

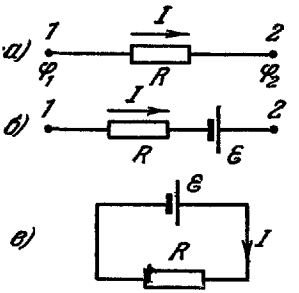

Рис. 2.16.

Если на участке цепи находится источник тока (рис. 2.16, *б*), то при переносе заряда q работу совершают как силы электрического поля, так и сторонние силы:

$$A = (U_{1,2} + \mathscr{E})\, It. \qquad (18.3)$$

Используя закон Ома (16.6) для такого участка, можно привести (18.3) к виду, аналогичному (18.2):

$$A = (U_{1,2} + \mathscr{E})\, It = I^2 R_{1,2} t. \qquad (18.4)$$

В случае замкнутой цепи (2.16, *в*) из двух слагаемых работы

$$A = U_{1,2} It + \mathscr{E} It$$

первое обращается в нуль, так как полное падение потенциала $U_{1,2}$ во всей цепи равно нулю. Поэтому

$$A = \mathscr{E} It = I^2 R_{полн} t, \qquad (18.5)$$

где $R_{полн}$ выражается формулой (16.7).