

## § 20. Закон Ома с точки зрения электронной теории металлов

Целый ряд фактов и косвенных данных привел физиков к выводу о наличии в металлах свободных электронов еще к началу XX века, задолго до того, как это было доказано прямыми опытами Стюарта и Толмэна. Перенеся на металлы некоторые представления и выводы кинетической теории газов, Лоренц и Друде разработали стройную теорию металлов, объяснявшую и связывавшую целый ряд свойств последних.

Вследствие сильного взаимодействия между атомами металла при соединении последних в кристаллическое твердое тело, самые внешние их электроны перестают быть связанными с отдельными атомами и легко переходят от одного атома к соседнему и далее через всю кристаллическую решетку. В узлах кристаллической решетки располагаются положительные ионы металла, а между ними хаотически движутся свободные электроны, образуя своеобразный электронный газ (рис. 2.22).

Считая, что каждый атом одновалентного металла отдает по одному электрону, а двухвалентного — по два, можно определить концентрацию свободных электронов в металлах. По порядку величины она оказывается равной  $10^{20} + 10^{21}$  электрон/ $m^3$ .

При столь большой концентрации электронов их взаимодействие между собой, как и с ионами кристаллической решетки металла, весьма велико. Однако, поскольку средняя сила, действующая на электрон со стороны всех остальных электронов и ионов, равна нулю, можно в первом приближении считать каждый электрон свободным, а его взаимодействие с ионами решетки и прочими электронами рассматривать как ряд последовательных соударений. Системе электронов в этом приближении приписывается лишь кинетическая энергия.

Вспомним теперь, что именно этим отличается описанный в томе I (часть II) идеальный газ. Поэтому Лоренц и Друде попытались построить теорию металлов, исходя из представления о том, что «электронный газ» в металлах есть идеальный газ, подчиняющийся законам статистики Максвелла — Больцмана. Мы остановимся весьма коротко на результатах Лоренца и Друде, ибо, как это будет показано ниже, последнее предположение оказалось совершенно неправильным.

В результате взаимодействия электронов и ионов металлической решетки, обусловленного их столкновениями, обе системы частиц должны приобрести одну и ту же температуру  $T$ . Следовательно,

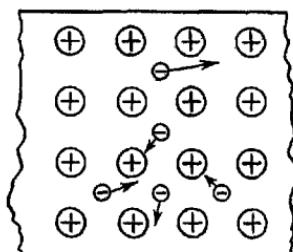


Рис. 2.22.

средняя энергия хаотического движения электронов должна равняться

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (20.1)$$

Отсюда средняя квадратичная скорость электронов равна

$$\bar{V_{u^2}} = u_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (20.2)$$

Подставляя значения  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  дж/град и  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, получаем, что  $u_{\text{кв}}$  при комнатной температуре, т. е. при  $T \approx 300^\circ\text{K}$ , равна  $u_{\text{кв}} = 110$  км/сек. Поскольку электрон пролетает расстояние, равное длине свободного пробега  $l$ , с некоторой средней скоростью  $\bar{u}$  (близкой к  $u_{\text{кв}}$ ), то время свободного пробега  $\tau$  равно

$$\tau = \frac{l}{\bar{u}}. \quad (20.3)$$

Если создать внутри металла однородное электрическое поле напряженностью  $E$ , то свободные заряды в металле приобретут дополнительную скорость  $v$  в направлении электрического поля (точнее, против поля, так как заряд электрона  $e < 0$ ). Суммарная скорость заряда складывается из хаотической  $\bar{u}$  и направленной  $v$  скоростей:

$$\bar{c} = \bar{u} + v. \quad (20.4)$$

Хаотическая скорость направлена то по полю, то против поля, и поэтому среднее значение вектора  $\bar{u}$  равно нулю. Следовательно, суммарная скорость  $\bar{c}$  в среднем направлена по полю и равна

$$\bar{c} = \bar{u} + \bar{v} = \bar{u} + \bar{v} = \bar{v}. \quad (20.5)$$

Рассмотрим изображенный на рис. 2.23 отрезок проводника с поперечным сечением  $S$ . Направим вектор напряженности электрического поля  $E$  вдоль проводника.

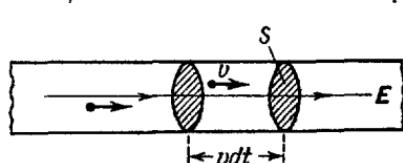


Рис. 2.23.

Каждый из свободных зарядов  $e$  внутри проводника приобретает направленную скорость  $v$  по полю. За промежуток времени  $dt$  через площадку  $S$  пройдут все те заряды, которые находятся на расстоянии от площадки  $S$ , не превышающем величину  $\bar{v} dt$ , т. е. все заряды, заключенные в объеме цилиндра  $S\bar{v} dt$ . Если число свободных зарядов в единице объема обозначить через  $n$ , то заряд  $dq$ , который пройдет за это время через поперечное сечение проводника в направлении электрического поля, будет

равен

$$dq = en\bar{S}v dt. \quad (20.6)$$

Отсюда величина тока, текущего в проводнике, равна

$$I = \frac{dq}{dt} = en\bar{S}v, \quad (20.7)$$

а плотность тока

$$j = \frac{I}{S} = en\bar{v}. \quad (20.8)$$

Учитывая векторный характер скорости и плотности тока, можно переписать (20.8) в виде

$$\mathbf{j} = en\bar{\mathbf{v}}. \quad (20.9)$$

При выводе этих формул мы считали, что свободные заряды положительны и движутся по полю. В случае свободных электронов  $e < 0$ , но и  $\bar{v} < 0$ , т. е. направлена против поля, знак же произведения  $en\bar{v}$  остается положительным, и электрический ток, как это было установлено в § 14, все равно идет в направлении электрического поля.

На основании (20.8) можно оценить порядок величины направленной скорости движения электронов. Возьмем, например, сравнительно сильный ток, плотность которого

$$j \approx 10 \frac{a}{м·м²} = 10^2 \frac{\kappa}{м²·сек}.$$

Тогда для медного проводника, концентрация электронов в котором  $n = 8 \cdot 10^{28} м^{-3}$ ,

$$\bar{v} = \frac{j}{en} = \frac{10^2 \kappa / м²·сек}{1,6 \cdot 10^{-19} \kappa \cdot 8 \cdot 10^{28} м^{-3}} \approx 8 \cdot 10^{-4} м/сек = 0,8 мм/сек.$$

Следовательно, даже при значительных токах

$$\bar{v} \ll u_{kv}, \quad (20.10)$$

и наличие электрического тока не оказывается на соотношениях (20.1)—(20.3).

Заряд  $e$ , помещенный в электрическом поле  $E$ , испытывает действие силы  $f = eE$  и приобретает ускорение  $\omega = f/m = eE/m$ . Поэтому направленная скорость заряда  $v$  в течение времени свободного пробега не остается постоянной, а линейно возрастает со временем. Однако в конце свободного пробега электрон сталкивается с ионами решетки, отдает им накопленную в поле энергию, и его дополнительная направленная скорость падает до нуля.

На графике рис. 2.24 изображена зависимость направленной скорости электрона  $v$  от времени  $t$ . За каждый период свободного пробега  $v$  нарастает от нуля до своего максимального значения

$$v_{\max} = w\tau = \frac{eE}{m}\tau = \frac{eEl}{mu}, \quad (20.11)$$

а затем сразу падает до нуля. В результате, хотя на каждом отрезке свободного пробега электрон движется ускоренно, но

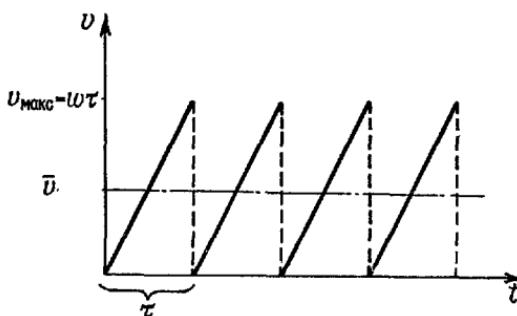


Рис. 2.24.

в среднем за много таких отрезков он перемещается в направлении поля практически равномерно со средней скоростью

$$\bar{v} = \frac{v_{\max} + 0}{2} = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{eEl}{2mu}. \quad (20.12)$$

Подставляя (20.12) в (20.8), мы получаем

$$j = \frac{ne^2l}{2mu} E, \quad (20.13)$$

т. е. закон Ома в дифференциальной форме (15.8).

Таким образом, электронная теория объясняет механизм электропроводности металлов, предсказывает основную закономерность явления — закон Ома — и дает величину коэффициента пропорциональности в этом законе, т. е. электропроводности:

$$\gamma = \frac{ne^2l}{2mu}. \quad (20.14)$$

Для меди (в системе Гаусса)

$$\gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{3 \cdot 10^{11}}{1.7 \cdot 10^{-8}} \approx 2 \cdot 10^{19} \text{ сек}^{-1}. \quad (20.14a)$$

Подставляя в (20.14) вместо  $n$  и  $\bar{u}$  оцененные выше значения, заряд  $e$  и массу электрона  $m$ , можно оценить длину свободного пробега в медном проводнике:  $l \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ , т. е. она имеет порядок нескольких десятков междуатомных расстояний.

Однако полученный результат не следует понимать как экспериментальное подтверждение правильности всех предположений Лоренца и Друде. Действительно, средняя длина свободного пробега электрона получена здесь из экспериментального значения  $\gamma$ , а не независимым образом из теории (и сравнена с опытом). И хотя выведенная таким путем численная величина  $l$  представляется разумной, обольщаться этим результатом нельзя. Более того, как будет показано в следующем параграфе, положения теории Лоренца—Друде привели к некоторым явным противоречиям с опытом.

Тем не менее работы Лоренца и Друде сыграли большую роль в развитии правильных представлений о природе металлов. В этих работах впервые была сделана попытка выяснить механизм явлений, происходящих в металлах. Так, например, электронная теория позволяет понять механизм выделения тепла электрическим током. Электрическое поле совершают работу и ускоряет электроны в металлах. Накапливаемая ими энергия при столкновениях с ионами передается решетке и нагревает металл. Отсюда можно вывести теоретически выражение закона Джоуля—Ленца.

Приведем схематически этот вывод. Средняя кинетическая энергия электрона в начале свободного пробега равна  $\frac{mv^2}{2}$ , а в конце пробега  $\frac{m(u+v_{\max})^2}{2}$ . Приращение энергии за счет работы электрических сил

$$\Delta \bar{e} = \frac{m(u+v_{\max})^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left( 2uv_{\max} + \frac{v_{\max}^2}{2} \right) = \frac{mv_{\max}^2}{2}, \quad (20.15)$$

так как направление хаотической скорости  $u$  с одинаковой вероятностью может совпадать с направлением  $v_{\max}$  ( $uv_{\max} > 0$ ) и быть прямо противоположным ( $uv_{\max} < 0$ ).

Эта энергия  $\Delta \bar{e}$ , накапливаемая электроном при его свободном пробеге, спустя время  $\tau$  отдается ионам решетки. Полная энергия, выделяющаяся в единице объема проводника за единицу времени, равна

$$p = \frac{n\Delta \bar{e}}{\tau} = \frac{n\bar{u}}{l} \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{n\bar{u}}{l} \frac{m}{2} \frac{e^2 l^2 E^2}{m^2 u^2} = \frac{ne^2 l}{2mu} E^2 = \gamma E^2. \quad (20.16)$$

Это соотношение представляет собой дифференциальную форму закона Джоуля—Ленца. Для перехода к интегральным соотношениям выделим участок цилиндрического проводника длиной  $L$  и с площадью поперечного сечения  $S$ . Мощность, выделяемая в объеме

$V = SL$  этого участка, равна

$$P = pV = \frac{1}{q} \left( \frac{U}{L} \right)^2 SL = \frac{U^2}{q \frac{L}{S}} = \frac{U^2}{R}, \quad (20.17)$$

где  $R = qL/S$  есть полное сопротивление этого участка.

Нетрудно убедиться, что выражение (20.17) тождественно ранее выведенному выражению (18.9) для закона Джоуля—Ленца.

## § 21. Основы современной теории металлов

Классическая электронная теория металлов, основы которой изложены в предыдущем параграфе, предсказывает, кроме закона Ома, и другие закономерности. Остановимся на некоторых из них.

Средняя энергия одного электрона

$$\bar{e} = \frac{3}{2} kT, \quad (21.1)$$

и средняя энергия электронного газа в единице объема

$$W = n\bar{e} = \frac{3}{2} knT. \quad (21.2)$$

Следовательно, теплоемкость единицы объема электронного газа будет равна

$$C_v = \frac{dW}{dT} = \frac{3}{2} kn, \quad (21.3)$$

а теплоемкость, отнесенная к одному электрону,

$$C_e = \frac{3}{2} k. \quad (21.4)$$

Высокая концентрация электронного газа и большая подвижность свободных электронов обусловливают легкую передачу заряда—высокую электропроводность металлов—и интенсивный перенос энергии—высокую теплопроводность металлов—по сравнению с диэлектриками. Считая, что практически вся теплопроводность металлов обусловлена свободными электронами, можно рассчитать коэффициент теплопроводности электронного газа  $\lambda$  методами кинетической теории газов. Используя формулы молекулярной физики (том I, часть II), найдем

$$\lambda = \frac{1}{3} l n C_e. \quad (21.5)$$

Сопоставляя (21.5) с выражением для коэффициента электропроводности

$$\gamma = \frac{n e^2 l}{2 m \bar{v}}, \quad (21.6)$$