среды. Как мы видели, μ_0 этого не отражает, поскольку **H** в системе СИ есть не физически наблюдаемая, а просто вспомогательная величина.

В системе СИ характеристикой среды является размерная величина μ_a:

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{B}_{\text{вак}}=\mu\mu_0\mathbf{H}=\mu_a\mathbf{H}. \tag{29.10}$$

Эту величину, равную, как это следует из (29.10),

$$\mu_a=\mu\mu_0, \tag{29.11}$$

называют в системе СИ абсолютной магнитной проницаемостью, а величину μ — магнитной проницаемостью данной среды.

Легко видеть, что можно для общности написания формул писать в них множитель μ_0, помня, что в гауссовой системе единиц величина $\mu_0=1$ и безразмерна.

Мы начнем изучение магнитных полей с простейшего случая магнитного поля линейных токов в вакууме, т. е. с изучения поля вектора напряженности **H**.

§ 30. Магнитное поле тока

Закон Био-Савара-Лапласа

Магнитное поле постоянных токов изучалось Био и Саваром, окончательная формулировка найденного ими закона принадлежит Лапласу. Поэтому закон, с помощью которого выражается магнитное поле постоянных токов, носит название *закона Био—Савара—Лапласа*.

Выше отмечалась основная трудность, связанная с формулировкой такого закона. Магнитное поле линейного тока зависит не только от величины тока I, но и от формы контура с током. В электростатике поле распределенных зарядов **E** также зависит от их расположения в пространстве. Однако там это поле можно было представить как сумму полей точечных зарядов $d\mathbf{E}$, причем поле точечного заряда могло быть непосредственно выделено и изучено. В случае постоянных токов мы также можем полагать, что результирующее поле **H** есть сумма полей $d\mathbf{H}$, созданных отдельными элементами тока. Но измерить и изучить поле *одного* изолированного элемента постоянного тока невозможно: любой постоянный ток течет по замкнутому контуру.

Единственный путь преодоления этой трудности состоит в следующем.

а) Предположим, что в любой точке пространства магнитное поле **H**, создаваемое всем током в целом, складывается из полей $d\mathbf{H}$, создаваемых элементами этого тока в этой точке. Будем считать, что для магнитных полей, как и для электрических, имеет место

принцип суперпозиции (наложения), и полная напряженность магнитного поля **H** дается векторной суммой (или интегралом) элементарных напряженностей:

$$\mathbf{H}=\int d\mathbf{H}. \qquad (30.1)$$

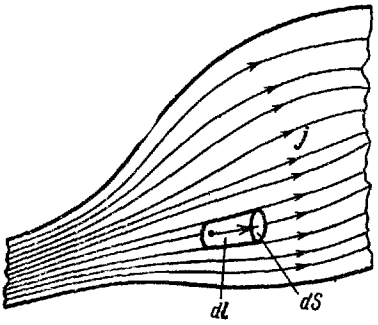

Рис. 3 7.

б) На основании изученных полей предположим математическую формулу закона, дающего выражение магнитного поля $d\mathbf{H}$ мысленно выделенного элемента тока. Если вычисленные на основе б) и с учетом а) магнитные поля для любых контуров будут иметь значения, подтверждающиеся опытом, то высказанные предположения можно считать правильными.

Пространственное распределение токов в каждой точке характеризуется вектором плотности тока **j**. Выделим бесконечно малый элемент объема dV в виде цилиндра, площадь основания которого dS перпендикулярна к **j**, а высота $d\mathbf{l}$ направлена вдоль **j** ($d\mathbf{l}\uparrow\uparrow\mathbf{j}$), как показано на рис. 3.7. Элемент тока, создающий магнитное поле, характеризуется величинами **j** и dV и равен

$$\mathbf{j}\,dV=\mathbf{j}\,dS\,dl=j\,dS\,d\mathbf{l}=I\,d\mathbf{l}, \qquad (30.2)$$

где $I=j\,dS$ — полный ток, проходящий через площадку dS.

Для линейных проводников, толщина которых пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием от них r, на котором определяется напряженность магнитного поля, мы будем пользоваться выражением (30.2), где I — ток в проводнике, а $d\mathbf{l}$ — элемент длины проводника. По закону Био—Савара—Лапласа *магнитное поле $d\mathbf{H}$, создаваемое элементом тока $I\,d\mathbf{l}$ на расстоянии r от него, обратно пропорционально квадрату расстояния и прямо пропорционально величине элемента тока и синусу угла β между векторами $I\,d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$*, т. е.

$$\boxed{dH=k\frac{I\,dl\sin\beta}{r^2}}. \qquad (30.3)$$

Как показано на рис. 3.8, вектор $d\mathbf{H}$ перпендикулярен к плоскости, проведенной через векторы $I\,d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ по направлению их векторного произведения $[I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{r}]$. Поэтому в векторной форме закон Био—Савара—Лапласа может быть записан в виде

$$d\mathbf{H}=k\frac{\left[I\,d\mathbf{l}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right]}{r^2}=k\frac{[I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad (30.4)$$

где $\mathbf{r}/r$ — единичный вектор, указывающий направление радиус-вектора $\mathbf{r}$.

Коэффициент пропорциональности k зависит от выбора системы единиц расстояний, токов и полей и, следовательно, должен быть связан с введенным выше по формуле (29.8а) множителем μ_0.

Закон Био—Савара—Лапласа был первоначально установлен для постоянного тока в проводниках — тока проводимости. В дальнейшем справедливость этого закона была подтверждена и для других форм движения электрических зарядов.

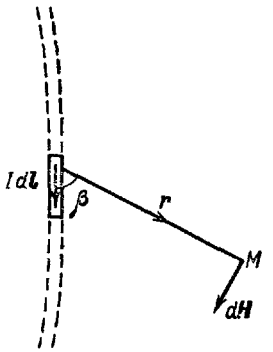

Рис. 3 8.

Для изучения магнитных полей конвекционных токов русский физик А. А. Эйхенвальд в 1901 г. сконструировал специальную установку, схема которой изображена на рис. 3.9. Два соосных диска A и B могут независимо вращаться с произвольной угловой скоростью. Изнутри диски по краю обклеены станиолем. Оба станиолевых колечка заряжаются от противоположных полюсов батареи и тем самым образуют плоский конденсатор. На каждой из пластин конденсатора распределен заряд $\pm q$, численно равный

$$q = CU, \qquad (30.5)$$

где C — электроемкость конденсатора, а U — приложенное напряжение.

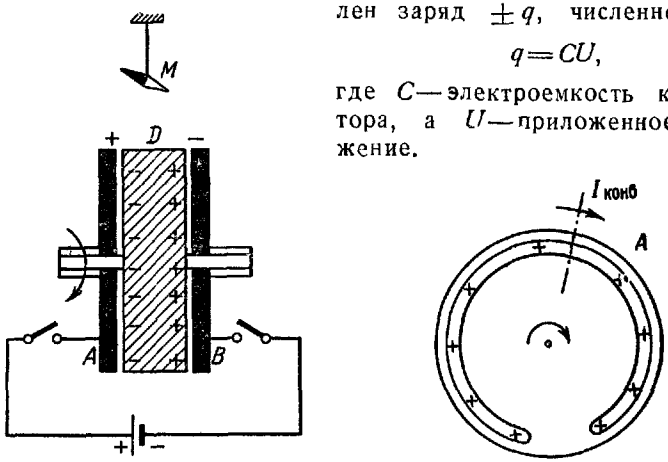

Рис. 3.9.

Приведем во вращение, например, положительно заряженный диск со скоростью n *об/сек*. Тогда через любое неподвижное сечение, например показанное на рис. 3.9 штрих-пунктиром, заряд q

будет в единицу времени проходить n раз. Следовательно, конвекционный ток через это сечение равен

$$I_{\text{конв}} = qn. \tag{30.6}$$

Величина и направление магнитного поля **H**, создаваемого этим током в произвольной точке M, измерялись с помощью маленькой магнитной стрелки, помещавшейся в эту точку. То же самое можно было сделать и при вращении второго диска или обоих вместе. Затем вращение дисков прекращалось, диски отключались от батареи, и через станиолевый электрод пропускался постоянный ток проводимости. Для этого колечко включалось во внешнюю цепь, как показано на рис. 3.10. Ток проводимости I измерялся гальванометром Γ и регулировался реостатом R. Когда величина I становилась равной $I_{\text{конв}}$, то магнитное поле в точке M оказывалось точно таким же, как и в случае вращения пластины конденсатора.

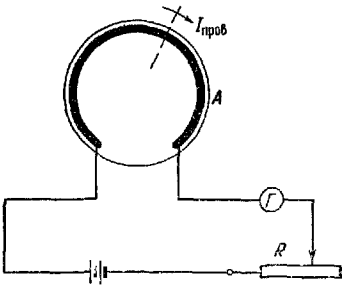

Рис. 3.10.

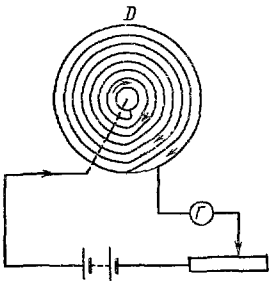

Рис. 3.11.

Видоизменяя опыт, Эйхенвальд помещал между дисками A и B пластинку из диэлектрика D. Эта пластинка поляризовалась, и на внешних ее поверхностях появлялись связанные с диэлектриком поляризационные заряды. Вращение одного диэлектрика создавало в колечках два тока взаимно противоположных направлений, магнитные поля которых в точке M не полностью компенсировало друг друга. Чтобы создать такой же ток проводимости, стороны пластинки покрывались проволочными спиралями, ток по которым шел в противоположных направлениях (рис. 3.11).

Во всех случаях Эйхенвальд наблюдал, что конвекционный ток, возникающий при переносе свободных или связанных зарядов, создает точно такое же магнитное поле, как и ток проводимости той же величины. Следовательно, магнитное поле конвекционных токов может также рассчитываться по закону Био—Савара—Лапласа (30.4).

Наконец, в 1911 г. А. Ф. Иоффе проверил на опыте справедливость этого закона для пучка электронов, летящих в вакууме. Схема

установки Иоффе изображена на рис. 3.12. Пучок электронов, вылетающий из накаленного катода, ускорялся электрическим полем и выпускался через щель в аноде A. Двигаясь далее по инерции в вакууме, электроны собирались металлическим цилиндром и отводились в землю. Электронный ток измерялся гальванометром $Г$. Напряженность магнитного поля определялась по углу закручивания тонкой нити, к которой были подвешены две магнитные стрелочки, как это показано на рисунке. После измерения электронная трубка заменялась прямым проводом, по которому пропускался точно такой же ток проводимости. Опыт подтвердил, что угол закручивания нити, а следовательно, и напряженность магнитного поля в обоих случаях одинаковы.

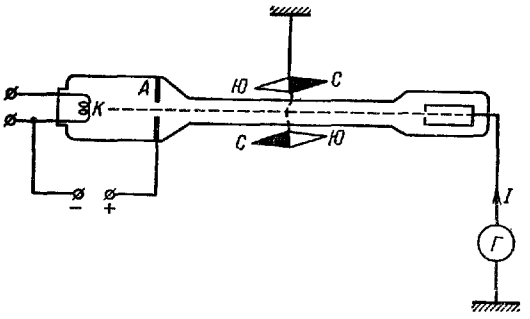

Рис. 3.12.

С помощью закона Био—Савара—Лапласа (30.4), применяя принцип суперпозиции (30.1), можно вычислить магнитное поле любых систем токов. В случае распределенных по объему токов в этих формулах, в соответствии с соотношением (30.2), следует заменить выражение для элемента тока $I\,d\mathbf{l} = \mathbf{j}\,dS\,dl$ на $\mathbf{j}\,dV$. Таким образом, закон Био—Савара—Лапласа играет в учении о магнетизме ту же роль, что и выражение (2.2) для напряженности электрического поля точечного заряда.

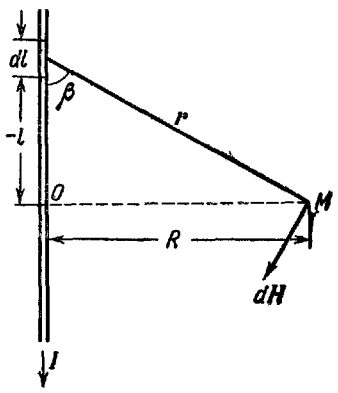

Рис. 3.13.

Рассмотрим два примера применения закона Био—Савара—Лапласа для вычисления магнитных полей линейных проводников с током.

Вычислим с помощью (30.4) напряженность поля $\mathbf{H}$, создаваемого бесконечным линейным током, в точке M, находящейся на расстоянии R от этого тока (рис. 3.13). Как видно из чертежа, направление $d\mathbf{H}$ в точке M остается одинаковым для любых элементов тока $I\,d\mathbf{l}$: $d\mathbf{H}$ перпендикулярно к плоскости, определяемой векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ (т. е. плоскости рисунка) и направлено

на нас, независимо от положения отрезка dl на линейном токе. Следовательно, геометрическая сумма полей $d\mathbf{H}$ превращается в алгебраическую, и, зная направление $d\mathbf{H}$, а следовательно, и результирующего поля $\mathbf{H}$, нам достаточно определить лишь его величину. Закон Био—Савара—Лапласа дает согласно (30.3)

$$dH = k\frac{I\sin\beta}{r^2}\,dl. \tag{30.7}$$

Для интегрирования нужно переменные r, l, β выразить через одну какую-либо из них. В качестве переменной интегрирования выберем угол β. Имеем

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{R}{\sin\beta}, \\ -l &= R\operatorname{ctg}\beta, \\ dl &= \frac{R\,d\beta}{\sin^2\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{30.8}$$

Подставляя (30.8) в (30.7), находим

$$dH = kI\frac{\sin^2\beta}{R^2}\sin\beta\,\frac{R\,d\beta}{\sin^2\beta} = k\frac{I}{R}\sin\beta\,d\beta. \tag{30.9}$$

Интегрируя по всему интервалу $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, отвечающему области проводника от $l = -\infty$ до $l = +\infty$, находим

$$H_{\text{л. т}} = k\frac{I}{R}\int_0^{\pi}\sin\beta\,d\beta = k\frac{I}{R}\,[\cos\beta]_{\text{л}}^{0} = k\frac{I}{R}\,[1-(-1)] = k\frac{2I}{R}. \tag{30.10}$$

Таким образом, напряженность магнитного поля бесконечного линейного тока $H_{\text{л т}}$ по величине пропорциональна току и обратно пропорциональна расстоянию от него. Направление $\mathbf{H}$ видно из рисунка.

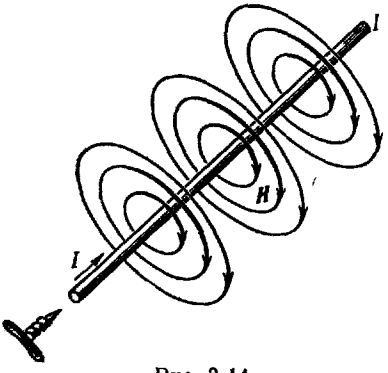

Рис. 3.14.

Полученный результат останется неизменным, если вращать всю плоскость, в которой лежат ток I и точка M (т. е. радиус-вектор $\mathbf{r}$), вокруг оси, совпадающей с линией тока. Отсюда следует, что линии напряженности магнитного поля, касательными к которым являются векторы $\mathbf{H}$, представляют собой концентрические окружности, изображенные на рисунке 3.14.

Этот результат является хорошим приближением для поля линейного тока в точках, близких от проводника и далеких от его границ.

Так как согласно (30.10) $H \sim 1/R$, то чем ближе к току, тем гуще расположены линии напряженности. На оси тока ($R=0$) напряженность поля должна быть бесконечно велика. Однако бесконечно тонких проводов не бывает. Следует помнить, что

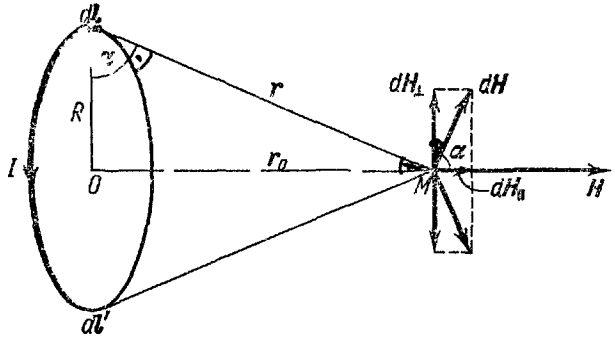

Рис 3 15

в соответствии с выводом (30.10) это выражение справедливо на расстояниях R, больших по сравнению с диаметром провода d.

Бесконечно длинных проводников также не бывает. Однако если длина проводника L достаточно велика по сравнению с R, то выражением (30.10) без большой погрешности можно пользоваться. Таким образом, это выражение практически пригодно для расчета магнитного поля тока, идущего по прямому проводу конечных размеров, при условии

$$d \ll R \ll L. \qquad (30.11)$$

В качестве второго примера применения закона Био—Савара—Лапласа вычислим напряженность магнитного поля на оси кругового тока. Пусть окружность, обтекаемая током I, имеет радиус R (рис. 3.15). Определим напряженность магнитного поля H в точке M, лежащей на оси окружности с током на расстоянии r_0 от ее центра.

Как видно из рисунка, $d\mathbf{l} \perp \mathbf{r}$, следовательно, $d\mathbf{H}$ по величине равно

$$dH = k\frac{I\,dl}{r^2}. \qquad (30.12)$$

При этом $d\mathbf{H}$ составляет с осью OM угол α. Заметим, что любому элементу dl отвечает диаметрально противоположный элемент dl', который дает такую же составляющую на ось OM: $d\mathbf{H}'_{\parallel} = d\mathbf{H}_{\parallel}$, а также перпендикулярную к OM составляющую $d\mathbf{H}'_{\perp} = -d\mathbf{H}_{\perp}$. Следовательно, при сложении всех составляющих $d\mathbf{H}_{\perp}$ (интегрировании по всему контуру) все они взаимно уничтожатся, в то время

как составляющие $d\mathbf{H}_{\parallel}$ будут складываться. Следовательно, результирующее поле $\mathbf{H}$ будет направлено по оси OM (что можно было, впрочем, сразу сказать по условию симметрии задачи относительно оси). Зная направление, мы можем теперь определить величину H, сложив составляющие $dH_{\parallel}$ всех элементов контура. Имеем

$$dH_{\parallel} = dH\cos\alpha = k\frac{I\,dl}{r^2}\cos\alpha. \tag{30.13}$$

Следовательно,

$$H = k\frac{I\cos\alpha}{r^2}\int_0^{2\pi R} dl = k\frac{2\pi IR\cos\alpha}{r^2}. \tag{30.14}$$

Заменяя r^2 его выражением через радиус тока R и расстояние точки наблюдения поля от центра окружности r_0:

$$r^2 = R^2 + r_0^2$$

и аналогично

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2+r_0^2)^{1/2}},$$

получаем окончательное выражение для H:

$$H_{\text{оси}} = k\frac{2\pi IR^2}{(R^2+r_0^2)^{3/2}}. \tag{30.15}$$

Магнитное поле $H_{\text{ц}}$ в центре окружности с током мы найдем, положив в выражении (30.15) $r_0 = 0$:

$$H_{\text{ц}} = k\frac{2\pi I}{R}. \tag{30.16}$$

На расстояниях $r_0 \gg R$ величиной R^2 в знаменателе можно пренебречь, и тогда

$$H_{\text{оси}} \approx k\frac{2\pi IR^2}{r_0^3}. \tag{30.17}$$

Вспоминая, что величина $I\pi R^2 = IS$ есть магнитный дипольный момент витка p_m, можем переписать последнее выражение в виде

$$H_{\text{оси}} \approx \frac{k}{k'}\frac{2p_m}{r_0^3}. \tag{30.18}$$

Таким образом, магнитное поле витка с магнитным моментом p_m на его оси меняется по такому же закону, как и электрическое поле электрического диполя на его оси (с точностью до коэффициента k/k', определяемого выбором системы единиц). Точный расчет показывает, что на больших расстояниях от витка вся структура

магнитного поля витка будет такой же, как и электрического поля диполя:

$$\mathbf{H} = \frac{k}{k'}\frac{p_m}{r_0^3}\left(3\,\frac{\mathbf{r}_0}{r_0}\cos\theta - \mathbf{n}\right). \qquad (30.19)$$

Этим мы установили некоторую эквивалентность витка по отношению к магнитному полю и диполя — к электрическому полю: 1) магнитное поле витка с током на большом расстоянии от него имеет ту же структуру, что и электрическое поле диполя также на соответствующем расстоянии от него, и 2) механические силы, испытываемые витком с током в магнитном поле, такие же, как для диполя в электрическом поле.

Подчеркнем еще раз, что это не означает одинаковой природы электрического и магнитного полей: электрическое поле обладает источниками — электрическими зарядами; магнитное же поле такими источниками не обладает — магнитных зарядов в природе нет. И если механические силы, испытываемые электрическим диполем в поле **E** и витком с током в поле **B**, одинаковы, как одинакова структура полей **E** диполя и **H** витка, то внутри диполя и витка с током вид полей **E** и **H** совершенно различен. К этому вопросу мы вернемся ниже (см. § 48).

§ 31. Действие магнитного поля на ток. Взаимодействие параллельных токов

Крутящий момент, испытываемый рамкой с током в магнитном поле, есть результат воздействия на отдельные элементы рамки $I\,d\mathbf{l}$ механических сил $d\mathbf{F}$. В предыдущем параграфе указывалось, что нельзя наблюдать поле $d\mathbf{H}$, создаваемое одним элементом постоянного тока $I\,d\mathbf{l}$, так как этот элемент нельзя отделить от остального участка цепи с током, создающей результирующее магнитное поле **H**. В отличие от этого механическое действие $d\mathbf{F}$, испытываемое отдельным элементом контура с током, помещенного во внешнее поле **B**, может быть непосредственно измерено.

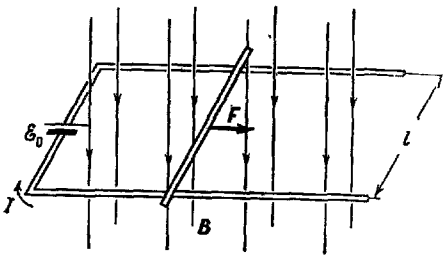

Рис. 3.16.

На рис. 3.16 изображена схема подобного опыта. Батарея $\mathcal{E}_0$ создает ток I в контуре, одна из сторон которого длиною l сделана подвижной и может скользить (или катиться) вдоль двух других. Если внести этот контур во внешнее магнитное