По закону Ампера сила, действующая со стороны этого магнитного поля на элемент тока второго проводника, равна

$$dF_{1,2}=k'B_{1,2}I_2\,dl\sin(I_2\,d\widehat{\mathbf{l},\ \mathbf{B}_{1,2}})=k'\mu\mu_0 k\frac{2I_1I_2}{R}dl \qquad (31.7)$$

и направлена в сторону первого тока. Эта сила притяжения на единицу длины проводника составит

$$f_{1,2}=\frac{dF_{1,2}}{dl}=\mu\mu_0 kk'\frac{2I_1I_2}{R}. \qquad (31.8)$$

Выражение (31.8) симметрично относительно токов I_1 и I_2, и, следовательно, на единицу длины первого проводника со стороны второго действует точно такая же сила притяжения $f_{2,1}=f_{1,2}$.

Если оба тока I_1 и I_2 идут в противоположных направлениях (рис. 3.22), то между ними действуют силы отталкивания, величина которых может быть вычислена по той же формуле (31.8).

§ 32. Системы единиц. Единицы измерения тока, магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Рассмотрим взаимодействие двух параллельных проводников в вакууме ($\mu=1$). Тогда согласно (31.8) сила взаимодействия на единицу длины проводника равна

$$\frac{dF}{dl}=\mu_0 kk'\frac{2I_1I_2}{R}. \qquad (32.1)$$

Мы уделим основное внимание двум наиболее важным в наши дни системам — СИ и абсолютной гауссовой, с которой, как более простой, мы и начнем.

В гауссовой системе единиц (как и других абсолютных системах) $\mu_0=1$, так что (32.1) принимает вид:

$$\frac{dF}{dl}=kk'\frac{2I_1I_2}{R}. \qquad (32.2)$$

Произведение коэффициентов kk', входящее в выражение (32.2), подлежит опытному определению. Их численные значения и размерности зависят от выбора единиц измерения остальных входящих в (32.1) механических и электрических величин.

Гауссова абсолютная система единиц. Напомним, что единица заряда в системе СГС уже определена (см. § 1). Тем самым определена и единица тока: *сила тока равна единице, если через поперечное сечение проводника в 1 сек проходит единица заряда.*

Как уже указывалось выше, при определении величины магнитной индукции B по крутящему моменту рамки мы должны в общем случае положить

$$M_{\text{кр}}=k'ISB\sin\alpha, \qquad (29.3)$$

что следует из закона Ампера

$$d\mathbf{F} = k' I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \tag{31.3}$$

Для вычисления силы взаимодействия линейных токов в вакууме мы должны применить закон Био—Савара—Лапласа

$$d\mathbf{H} = kI \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3} \tag{30 4}$$

и закон Ампера (31.3) при $\mathbf{B} = \mathbf{H}$

$$d\mathbf{F} = k' I [d\mathbf{l} \times \mathbf{H}]. \tag{32.3}$$

Отсюда для силы, действующей на единицу длины одного из двух параллельных токов I_1 и I_2, находящихся на расстоянии R, получим (32.2):

$$\frac{dF}{dl} = k' k \frac{2 I_1 I_2}{R}.$$

В этой формуле определены единицы всех входящих в нее величин. Задача состоит, следовательно, в определении размерности и величины произведения kk'. Сравнивая размерности левой и правой частей равенства

$$\frac{г\ см}{сек^2\ см} = [kk'] \frac{см^3\ сек^{-4}}{см}, \tag{32.4}$$

находим

$$[kk'] = см^{-2}\ сек^2 = \frac{1}{[v^2]}, \tag{32.5}$$

т. е. размерность kk' равна размерности квадрата обратной величины скорости. Численное значение этой величины может быть определено только на опыте. Эксперимент дает

$$\boxed{kk' = \frac{1}{c^2},} \tag{32.6}$$

где $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек* — скорость света в вакууме.

Соотношение (32.6) оставляет произвол в выборе k и k'.

В абсолютной гауссовой системе единиц полагают:

$$k' = k = \frac{1}{c}. \tag{32.7}$$

Таким образом, выведенные выше основные законы приобретают симметричный вид:

закон Био—Савара—Лапласа

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{c} \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \tag{32.8}$$

закон Ампера

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \times \mathbf{H}] \tag{32.9}$$

или, при наличии среды,

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c}[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \tag{32.9a}$$

Выражение (32.2) в гауссовой системе примет вид

$$\frac{dF}{dl} = \frac{1}{c^2}\frac{2I_1I_2}{R}, \tag{32.10}$$

где F выражено в динах, dl и R — в сантиметрах, c — в *см/сек* и I_1 и I_2 — в гауссовых единицах силы тока.

Магнитное поле бесконечного линейного тока (30.10) при указанном значении постоянной k примет вид

$$\boxed{H_{\text{л. т}} = \frac{1}{c}\frac{2I}{R}.} \tag{32.11}$$

Отсюда определение единицы напряженности магнитного поля — эрстед: *эрстед есть напряженность магнитного поля бесконечного линейного тока силой в с СГС ед. тока* (=10 *а*) *на расстоянии* 2 *см от тока* (учет двойки в числителе).

Размерности напряженности магнитного поля **H** и индукции **B** совпадают, так как в системе СГС **B**=μ**H**, где μ — безразмерная величина. В вакууме μ=1 и **B**=**H**.

Единица индукции **B** носит название гаусса (*гс*) (**B** гауссов = =μ**H** эрстед).

В электронике, физике атома и атомного ядра, физике элементарных частиц величины ε_0 и μ_0, как правило, не вводятся. Для этих и ряда других разделов физики и техники абсолютная система единиц Гаусса остается одной из наиболее удобных.

Остановимся кратко еще на двух абсолютных системах единиц — электростатической (СГСЭ) и электромагнитной (СГСМ). Обе эти системы, как и система Гаусса (СГС), исходят из трех основных единиц: массы (*г*), длины (*см*), времени (*сек*) и никаких добавочных произвольных единиц не вводят (отсюда и термин — пожалуй, не совсем удачный — «абсолютные» системы, хотя в них, конечно, три исходные единицы выбраны произвольно).

Система СГСЭ. Отличие системы СГСЭ от СГС состоит лишь в том, что вместо (32.7) принимается

$$k' = 1, \quad k = \frac{1}{c^2}. \tag{32.7a}$$

В результате единицы всех электрических величин и тока оказываются такими же, как в гауссовой системе, магнитные же единицы отличаются, притом весьма неудобным образом (см. приложение I). ε и μ определяются, как и в СГС.

Система СГСМ практически удобнее и использовалась чаще, чем СГСЭ. Ее отличие в ином определении производных единиц.

В качестве исходного берется уравнение (32.5), описывающее взаимодействие токов, а не (1.4), описывающее взаимодействие зарядов. В соответствии с этим коэффициент пропорциональности kk' в (32.5) принимается равным единице:

$$kk' = 1, \tag{32.7б}$$

и далее, из (32.5) определяется единичный ток:

Бесконечный линейный ток в 1 СГСМ *ед. тока взаимодействует с параллельным и равным ему током, находящимся от него на расстоянии в* 2 *см, так что отрезок тока в* 1 *см испытывает силу в* 1 *дину.*

Читатель легко проверит, что 1 СГСМ ед. тока = 10 *а*. ε и μ определяются так же, как в системе СГС. Заметим, что удобная единица силы тока — единственное, но часто решающее преимущество этой системы перед системой СГС, где единица тока, равная 10 *а/с*, как правило, неудобна.

Единица заряда определяется в СГСМ через единицу тока: при токе в 1 СГСМ через поперечное сечение проводника проходит в 1 *сек* 1 СГСМ-ед. заряда (10 кулонов).

Сказанного достаточно, чтобы читатель мог при желании определить все интересующие его величины и писать формулы в этих системах. Сводка единиц, их размерностей и переводных коэффициентов систем СГС, СГСЭ, СГСМ и СИ приведена в приложении I.

Ныне принятая международная система единиц СИ, оперирующая практически удобными единицами, широко применяется в электро- и радиотехнике и ряде других разделов техники. К определению этой системы мы и переходим.

Международная система единиц СИ (Система Интернациональная). Три исходные единицы: масса (*кг*), длина (*м*) и время (*сек*). Основной особенностью этой системы является введение четвертой «независимой» единицы — силы тока — ампера. Это удобно практически, хотя введение добавочной единицы физически не оправдано.

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 *м один от другого в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу в* $2 \cdot 10^{-7}$ *н/м.*

Единица заряда, как и в СГСМ, определяется через единицу силы тока и равна кулону.

В этой системе для «рационализации» записи формул принимают

$$k' = 1, \quad k = \frac{1}{4\pi},$$

так что в единицах СИ формула (32.1) имеет вид

$$\frac{dF}{dl}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{R}. \qquad (32.12)$$

В этом выражении все величины кроме μ_0 определены в единицах СИ (ток I — в независимых единицах — амперах). Следовательно, размерность μ_0 определяется в этих же единицах из (32.12), а величина — из опыта. Иными словами, в СИ величина μ_0 определяется так, чтобы при I, выраженном в амперах, dl и R — в метрах сила F была выражена в ньютонах.

Чтобы получить значение μ_0, перейдем в (32.12) к конечным величинам, положив dl равным одному метру. Полагая далее $R=1$ *м*, $I_1=I_2=1$ *а*, получим, учитывая приведенное выше определение ампера:

$$2\cdot10^{-7}\ н=\frac{\mu_0}{4\pi}\,2\,а^2.$$

Отсюда размерность и величина μ_0:

$$\boxed{\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ н/а^2.} \qquad (32.13а)$$

Поскольку

$$1\ н=дж/м=вт\cdot сек\cdot м^{-1}=а\cdot в\cdot сек\cdot м^{-1},$$

можем переписать μ_0 в более удобном для использования виде:

$$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ в\cdot сек\cdot м^{-1}\cdot а^{-1}. \qquad (32.13б)$$

Для читателя, не забывшего из школьного курса определение единицы индуктивности генри (*гн*), приведем еще одно удобное выражение для μ_0, которое будет выведено нами далее, на стр. 270:

$$\boxed{\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ гн\cdot м^{-1}.} \qquad (32.13в)$$

Таким образом, k, k' и μ_0 определены. Закон Био — Савара — Лапласа (при отсутствии среды) принимает вид

$$d\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi}\frac{[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad (32.14)$$

что в соответствии с (30.10) для напряженности магнитного поля бесконечного линейного тока дает

$$H=\frac{1}{4\pi}\frac{2I}{R}=\frac{I}{2\pi R}. \qquad (32.15)$$

Отсюда получаем единицу напряженности магнитного поля ампер на метр (*а/м*) — это напряженность поля бесконечного линейного тока в 1 *а* на расстоянии $R=\frac{1}{2\pi}$ метров от него.

Соотношение между этой величиной и напряженностью магнитного поля в гауссовой системе единиц — эрстедом найдем, сопоставляя (32.15) с соответствующей формулой в системе СГС (32.11):

$$H=\frac{1}{c}\frac{2I}{R}\ э. \tag{32.11a}$$

Подставляя сюда $I=1\ a=\frac{c}{10}$ СГС ед. тока и $R=\frac{1}{2\pi}\ м$ в сантиметрах, получим $H=1\ a/м$:

$$1\ \frac{a}{м}=\frac{1}{c}\frac{2\frac{c}{10}}{\frac{1}{2\pi}100}\ э=4\pi\ 10^{-3}\ э, \tag{32.16}$$

или

$$\boxed{1\ э=79{,}3\ \frac{a}{м}\approx 80\ \frac{a}{м}} \tag{32.17}$$

В соответствии с (29.8′) в системе единиц СИ индукция в вакууме $\mathbf{B}_{вак}$ отличается от $\mathbf{H}$ и равна

$$\boxed{\mathbf{B}_{вак}=\mu_0\mathbf{H}=4\pi\ 10^{-7}\ \frac{н}{a^2}\cdot \mathbf{H}\ \frac{a}{м}=4\pi\ 10^{-7}\ \mathbf{H}\ \frac{н}{aм}.} \tag{32.18}$$

Единица индукции в системе СИ называется тесла (*тл*). Соотношение единиц индукции легко находим. Действительно, при

$$H=\frac{B}{\mu_0}=1\ \frac{a}{м}$$

индукция B численно равна μ_0, т. е.

$$B=4\pi\cdot 10^{-7}\ тл.$$

Но при $H=1\ a/м$, как это следует из (32.16), индукция в вакууме составляет $4\pi\,10^{-3}\ гс$. Следовательно, имеем

$$4\pi\ 10^{-7}\ тл=4\pi\ 10^{-3}\ гс,$$

или

$$\boxed{1\ гс=10^{-4}\ тл.} \tag{32.19}$$

Закон Ампера в системе СИ принимает вид

$$d\mathbf{F}=I[d\mathbf{l}\times\mathbf{B}]=\mu\mu_0 I[d\mathbf{l}\times\mathbf{H}]. \tag{32.20}$$

В случае вакуума $\mu=1$ и

$$d\mathbf{F}=\mu_0 I[d\mathbf{l}\times\mathbf{H}]. \tag{32.21}$$

Ряд формул, которые нам придется рассматривать в дальнейшем, необходимо записать так, чтобы читатель мог пользоваться по собственному выбору как гауссовой системой единиц, так и едини-

цами СИ. Для этого следует сохранить при написании формул величины (смысл которых следует хорошо понимать) k_0 (стр. 13, 14, 34), k (стр. 194, 195), k' (стр. 190, 202), ε_0 (стр. 14, 79) и μ_0 (стр. 192, 209, 270), придавая им нужные значения в соответствии с выбранной системой единиц:

В гауссовой абсолютной системе единиц (СГС):

$$k_0=1, \quad k=\frac{1}{c}, \quad k'=\frac{1}{c}, \quad \varepsilon_0=1, \quad \mu_0=1.$$

В Международной системе единиц (СИ):

$$k_0=\frac{1}{4\pi}, \quad k=\frac{1}{4\pi}, \quad k'=1,$$

$$\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}\,м^{-1}\,сек\,a\,в^{-1}=ф\cdot м^{-1}=\frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}\,м^{-3}\,кг^{-1}\,сек^4\,a^2,$$

$$\mu_0=4\pi\,10^{-7}\,м^{-1}\,сек\,a^{-1}\,в=гн\cdot м^{-1}=4\pi\,10^{-7}\,м\,кг\,сек^{-2}\,a^{-2}.$$

Обратим внимание читателя на то, что

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}\,4\pi\,10^{-7}\,м^{-2}\,сек^2=\frac{1}{(3\cdot 10^8\,м/сек)^2}=\frac{1}{c^2}.$$

Таким образом, одна и та же величина $1/c^2$, что, естественно, входит в обе системы. Однако в абсолютной гауссовой системе она делится на два равных множителя. В системе СИ выбор практически удобной добавочной единицы силы тока приводит к разделению величины $1/c^2$ на множители, различающиеся численно и по размерности.

Сводка электромагнитных физических величин, их размерностей в системах СГС, СИ, СГСЭ и СГСМ, а также соотношений между ними приведена в приложении I.

§ 33. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля. Магнитное поле соленоида

Теорема о циркуляции вектора **H**, которая будет изложена в этом параграфе, имеет в учении о магнитном поле такое же значение, как теорема Гаусса в электростатике. В частности, подобно тому, как при симметричном распределении зарядов теорема Гаусса позволяла вычислить вектор **E**, не прибегая к закону Кулона, теорема о циркуляции **H** позволит находить напряженность магнитного поля при наличии симметрии токов без применения закона Био — Савара — Лапласа, что часто очень облегчает вычисления.

Мы докажем теорему о циркуляции **H** в целях упрощения вычислений лишь для случая прямолинейного бесконечного тока. Как показывает строгий расчет, тот же результат имеет место и в случае контуров произвольной формы, чем мы и воспользуемся без строгого доказательства.