ГЛАВА VIII

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 36. Движение зарядов в магнитном поле

Сила, которую испытывает элемент тока, помещенный в магнитное поле, есть результирующая всех сил, действующих на отдельные заряды, движущиеся в этом элементе. Это позволяет найти силу, действующую на одиночный заряд, перемещающийся в магнитном поле.

Элемент тока, изображенный на рис. 3.37, имеет длину dl и конечную площадь поперечного сечения S. Для упрощения рассуждений примем, что в проводнике имеет место ток зарядов одного знака. Величину каждого заряда обозначим через e, число таких зарядов в единице объема проводника — через n и среднюю скорость их направленного движения в проводнике — через v. Тогда ток I равен

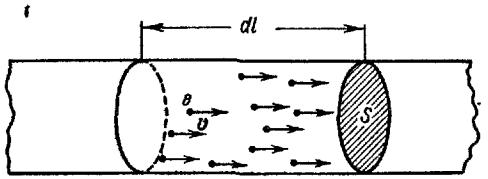

Рис. 3.37.

$$I = jS = nevS$$

и

$$I\,dl = evnS\,dl = evN, \quad (36.1)$$

где $N = nS\,dl$ есть полное число движущихся зарядов в элементе тока. Поскольку векторы $d\mathbf{l}$ и $e\mathbf{v}$ параллельны друг другу (при $e > 0$ $\mathbf{v} \uparrow\uparrow d\mathbf{l}$, при $e < 0$ $\mathbf{v} \uparrow\downarrow d\mathbf{l}$, так что $e\mathbf{v} \uparrow\uparrow d\mathbf{l}$ при любом знаке заряда e), то

$$I\,d\mathbf{l} = Ne\mathbf{v}. \quad (36.2)$$

В этой главе мы будем рассматривать движение заряженных частиц в магнитных и в электрических полях. Как уже указывалось, для расчета электромагнитных воздействий на отдельные заряженные

частицы удобно применять абсолютную гауссову систему единиц, которой мы и будем пользоваться в этой главе.

Поместим рассматриваемый элемент тока в постоянное магнитное поле. По закону Ампера (32.9) на этот элемент тока будет действовать сила

$$d\mathbf{F}=\frac{1}{c}[I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}]=\frac{Ne}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \tag{36.3}$$

Отсюда сила, действующая на одиночный заряд e, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле $\mathbf{B}$, будет равна

$$\mathbf{f}=\frac{d\mathbf{F}}{N}=\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \tag{36.4}$$

Величина этой силы равна

$$\boxed{f=\frac{e}{c}vB\sin(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{B}}).} \tag{36.5}$$

Сила, действующая на одиночный электрический заряд в магнитном поле,

$$\mathbf{f}=e\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right], \tag{36.6}$$

называется лоренцовой силой.

Поскольку в данной главе мы будем изучать движение заряженных частиц в вакууме или достаточно разреженном газе, а в абсолютных системах $\mathbf{B}_{\text{вак}}=\mathbf{H}$, то формулу (36.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{f}=\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]. \tag{36.7}$$

Здесь e измеряется в СГС ед. заряда, H — в *э*, v и c — в *см/сек* и f — в *дин**).

Взаимная ориентация векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{f}$ показана для случая положительных зарядов ($e>0$) на рис. 3.38, *а* и для случая отрицательных зарядов ($e<0$) на рис. 3.38, *б*. Величина этой силы зависит от угла β между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ и равна

$$f=\frac{e}{c}vH\sin\beta. \tag{36.8}$$

Отсюда видно, что магнитное поле не действует на заряженную частицу в двух случаях: если $\mathbf{v}=0$, т. е. частица неподвижна, или если $\sin\beta=0$ и $\mathbf{v}\parallel\mathbf{H}$, когда частица движется вдоль линий магнитного поля.

*) В системе СИ формулы (36.6) и (36.7) примут вид

$$\mathbf{f}=e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]=\mu_0 e[\mathbf{v}\times\mathbf{H}].$$

Обозначим массу движущейся частицы через m. Тогда по второму закону Ньютона частица получает ускорение $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}=\frac{\mathbf{f}}{m}. \tag{36.9}$$

Подставляя в (36.9) значение $\mathbf{f}$ из (36.7), получаем

$$\mathbf{w}=\frac{e}{mc}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]. \tag{36.10}$$

При произвольном движении вектор ускорения $\mathbf{w}$ имеет две составляющие — касательное ускорение $\mathbf{w}_к$ и нормальное $\mathbf{w}_н$. Анализируя (36.10), мы видим, что при движении заряда в магнитном поле его ускорение $\mathbf{w}$ перпендикулярно к скорости $\mathbf{v}$, т. е. всегда направлено по нормали к траектории. Это следует из того, что вектор $[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]$, в соответствии с правилами векторного умножения, перпендикулярен к вектору $\mathbf{v}$ (и, конечно, к вектору $\mathbf{H}$). Следовательно, в этом случае

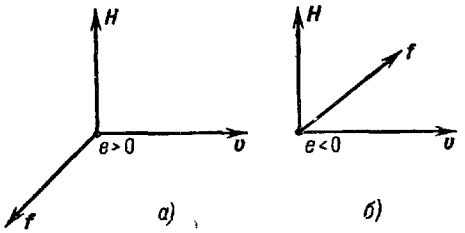

Рис. 3.38.

$$\left.\begin{aligned} w_к&=0,\\ w_н&=\frac{e}{mc}vH\sin(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{H}}).\end{aligned}\right\} \tag{36.11}$$

Вспомним (том I, часть I), что изменение величины вектора скорости обусловлено составляющей ускорения $w_к=\frac{dv}{dt}$, в то время как составляющая ускорения $w_н$ изменяет направление вектора скорости, не меняя его величины. Следовательно, в нашем случае имеем

$$\frac{dv}{dt}=0, \quad \text{или} \quad v=\text{const}. \tag{36.12}$$

Значит, при движении заряженной частицы в постоянном магнитном поле скорость ее движения $\mathbf{v}$ может изменяться лишь по направлению. Абсолютная же величина скорости v остается неизменной, а значит, не меняется и кинетическая энергия частицы:

$$E_{кин}=\frac{mv^2}{2}=\text{const}, \tag{36.13}$$

т. е. *постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей.* Это может быть получено и из непосредственного рассмотрения выражения для силы $\mathbf{f}$, дей-

ствующей на заряд, движущийся в магнитном поле. Согласно (36.7) эта сила перпендикулярна к скорости, т. е. перпендикулярна к направлению траектории частицы, и поэтому работа силы равна нулю.

Следует подчеркнуть, что *неизменность величины скорости и кинетической энергии заряженной частицы в магнитном поле имеет место лишь в том случае, если это поле постоянно, не зависит от времени.* В главе IX будет показано, что переменное магнитное поле ускоряет заряженные частицы (точнее, меняет не только направление, но и величину скорости).

Нормальное ускорение $w_н$ всегда равно v^2/r, где r есть радиус кривизны траектории в данной точке (см. т. I, гл. I). Из (36.11) тогда получаем соотношение

$$\frac{v^2}{r}=\frac{e}{mc}vH\sin\beta, \quad \text{или} \quad r=\frac{mcv}{eH\sin\beta}, \tag{36.14}$$

позволяющее определить радиус кривизны во всех точках траектории частицы. Разберем два простейших примера.

Пример 1. Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле $\mathbf{H}=\text{const}$ с начальной скоростью $\mathbf{v}$, направленной перпендикулярно к вектору напряженности магнитного поля ($\mathbf{v}\perp\mathbf{H}$). Поскольку $\mathbf{f}$ и $\mathbf{w}$ тоже перпендикулярны к $\mathbf{H}$, то в дальнейшем вектор скорости будет оставаться перпендикулярным к $\mathbf{H}$, и вся траектория будет лежать в плоскости, перпендикулярной к вектору напряженности магнитного поля. Тогда $\sin\beta=\sin 90°=1$, из (36.14) получаем, что

$$r=\frac{mcv}{eH}=\text{const} \tag{36.15}$$

— радиус кривизны траектории остается постоянным, а сама траектория есть окружность радиуса r. Этот радиус для частиц данной природы (т. е. для данных значений m и e или для частиц с данным отношением e/m) прямо пропорционален скорости частицы v и обратно пропорционален напряженности магнитного поля H. Длина окружности

$$L=2\pi r=2\pi\frac{mcv}{eH} \tag{36.16}$$

также пропорциональна скорости частицы, а период обращения ее в поле

$$T=\frac{L}{v}=2\pi\frac{mc}{eH} \tag{36.17}$$

зависит не от скорости v, а только от напряженности магнитного поля H, заряда e и массы m частицы. Независимость периода обращения T от скорости v и кинетической энергии частицы играет важную роль в практических приложениях (например, в ускорителе тяжелых частиц — циклотроне, см. стр. 231, 232).

Пример 2. Частица влетает в однородное магнитное поле $\mathbf{H}=\text{const}$, и направление вектора ее скорости $\mathbf{v}$ составляет с линиями магнитного поля угол β, отличный от 90°. Мы можем разложить $\mathbf{v}$ на две составляющие: перпендикулярную ($\mathbf{v}_\perp$) и параллельную ($\mathbf{v}_\parallel$) полю, как показано на рис. 3.39. Величины этих составляющих равны

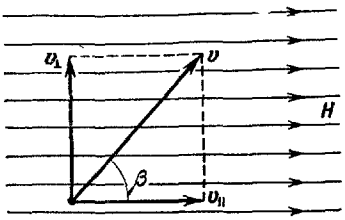

Рис. 3.39.

$$v_\parallel = v\cos\beta \quad \text{и} \quad v_\perp = v\sin\beta. \tag{36.18}$$

Сила, действующая на частицу,

$$f = \frac{e}{c} Hv\sin\beta = \frac{e}{c} Hv_\perp \tag{36.19}$$

лежит в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{H}$, определяется величиной вектора $\mathbf{v}_\perp$ и изменяет его направление.

Движение частицы при этом можно представлять как сумму двух независимых движений. Одно из них происходит в направлении $\mathbf{H}$, а другое — в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{H}$, в которой действует сила $\mathbf{f}$. Испытывая эту силу, частица будет вращаться по окружности радиуса

$$R = \frac{mcv_\perp}{eH} = \frac{mcv\sin\beta}{eH} \tag{36.20}$$

в плоскости, перпендикулярной к вектору напряженности магнитного поля, и будет совершать один оборот за время T, определяемое из (36.17).

С другой стороны, поскольку $\mathbf{f}\perp\mathbf{H}$ и $\mathbf{f}\perp\mathbf{v}_\parallel$, то частица будет двигаться вдоль линий магнитного поля с постоянной поступательной скоростью $\mathbf{v}_\parallel=\text{const}$. Вследствие наложения этих двух движений — поступательного вдоль линий поля и вращательного в перпендикулярной к ним плоскости — частица будет двигаться по винтовой линии с шагом винта

$$\boxed{h = v_\parallel T = 2\pi\frac{mc}{eH}v\cos\beta.} \tag{36.21}$$

Рассмотренные простейшие примеры показывают, что заряженные частицы, влетающие в постоянное магнитное поле, изменяют направление своего движения и начинают «навиваться» на линии вектора $\mathbf{H}$. Этим свойством пользуются в некоторых приборах, чтобы удержать пучки заряженных частиц от расплывания. Если частица движется точно вдоль линии $\mathbf{H}$, то магнитное поле не оказывает на нее никакого воздействия ($\mathbf{v}\parallel\mathbf{H}$ и $\mathbf{f}=0$). Если же частица по каким-либо причинам получит составляющую скорости $\mathbf{v}_\perp$, перпендикулярную к линиям поля, то она все равно не уйдет далеко в сторону от заданной траектории и будет двигаться по винтовой линии, навиваясь на эту траекторию.

Из мирового пространства на Землю приходят потоки заряженных частиц большой энергии — космические лучи. Кроме того, на Землю падает поток заряженных частиц, испускаемых Солнцем. При приближении к земной поверхности эти частицы начинают испытывать действие магнитного поля Земли. На рис. 3.40 показано изменение их траекторий Те из них, которые направляются к магнитным полюсам Земли, будут двигаться почти вдоль линий земного магнитного поля и навиваться на последние. Так как по мере приближения к земной поверхности напряженность магнитного поля H возрастает, то согласно (36 20) радиус окружности винтовой линии будет уменьшаться.

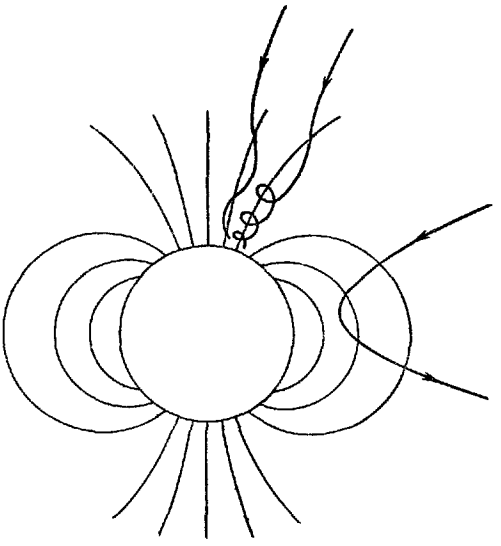

Рис 3 40

Заряженные частицы, подходящие к Земле вблизи экваториальной плоскости, направлены почти перпендикулярно к линиям магнитного поля и отклоняются в сторону от своего первоначального направления. Лишь самые быстрые из них ($R \sim v$) смогут дойти до поверхности Земли Такова причина так называемого широтного эффекта, заключающегося в том, что интенсивность космических лучей, доходящих до Земли вблизи экватора, заметно меньше, чем в более высоких широтах. Этим же обстоятельством объясняется и то, что свечение в верхних слоях атмосферы, вызываемое корпускулярным излучением Солнца, наблюдается главным образом в полярных областях (полярные сияния).

Независимость периода обращения T от скорости частицы в однородном магнитном поле была использована в ускорителе заряженных частиц, названном циклотроном, применяемом для исследований атомных ядер. Мощное, почти однородное магнитное поле создается между громадными полюсными наконечниками электромагнита, диаметр которых достигает иногда нескольких метров. В этом поле помещается вакуумная камера, в которой ускоряемые частицы могут двигаться, практически не испытывая столкновений с молекулами воздуха. Важнейшей частью этой камеры являются находящиеся в ней дуанты — плоские металлические полукруглые коробки, показанные на рис. 3.41. На дуанты подается переменное

напряжение, так что в щели между ними возникает электрическое поле, способное ускорять заряженные частицы.

Ускоряемые частицы — чаще всего протоны или другие ядра — вводятся в циклотрон вблизи от центра прибора и, обладая малой скоростью, описывают согласно (36.15) дугу окружности малого радиуса. Проходя в электрическом поле между дуантами, они ускоряются и во второй половине дуантов проходят по дуге большего радиуса, но за то же самое время, равное половине периода T:

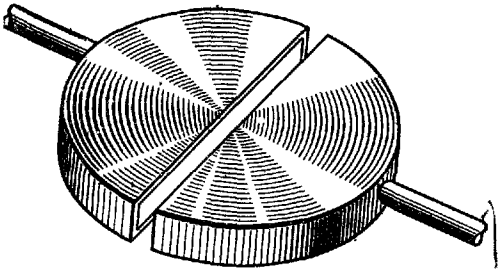

Рис 3.41.

$$\frac{T}{2}=\pi\frac{mc}{eH}. \qquad (36.22)$$

Если подобрать период подаваемого на дуанты напряжения равным T, то частицы, проходя между ними, будут в обоих полупериодах ускоряться. При этом радиусы полуокружностей, описываемых в каждом дуанте, будут возрастать, но время совершения оборота T в дуантах будет оставаться постоянным, что позволяет подавать на дуанты переменное напряжение постоянной частоты (значение которой зависит только от e/m для ускоряемых частиц и от напряженности магнитного поля H).

Чтобы ускоряемые частицы оставались в центральной плоскости прибора и не отклонялись к верхней или нижней стенкам дуантов, применяется следующий способ. Полюсам электромагнита придается такая форма, что зазор между ними увеличивается к краям (рис. 3.42). Если, например, заряженная частица приобретет вертикальную составляющую скорости и отклонится вверх, то, как видно из рисунка, в несколько неоднородном поле **H** возникает вертикальная составляющая силы, возвращающая частицу обратно в экваториальную плоскость прибора (скорость частицы **v** направлена от нас перпендикулярно к плоскости рисунка, что показано крестиком). Таким образом устраняется потеря частиц, неизбежная при отсутствии сил, удерживающих их в плоскости траектории. Доходя до

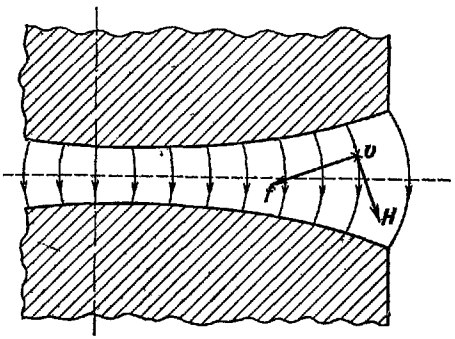

Рис. 3.42.

боковых стенок дуантов, ускоренные частицы с помощью специального приспособления выводятся из циклотрона и направляются на мишень.

В результате многократного ускорения между дуантами частицы приобретают энергию, которую они могли бы получить при однократном ускорении полем с разностью потенциалов до 10 миллионов вольт. Частиц со значительно бо́льшими энергиями циклотрон дать не может: с ростом скорости частиц увеличивается их масса $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$, а, значит, согласно (36.22), увеличивается период T оборота частиц. В результате синхронность между вращением частицы и переменным ускоряющим напряжением нарушается и дальнейшее ускорение становится невозможным. Эта трудность устраняется в более совершенных ускорителях частиц, в которых напряженность магнитного поля и частота переменного электрического поля в процессе ускорения меняются

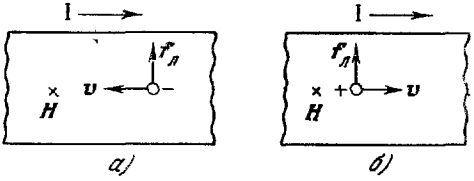

Рис. 3.43.

Пример 3. Своеобразный эффект, обусловленный действием лоренцовой силы на свободные заряды в проводнике и носящий название эффекта Холла, позволяет судить о знаке этих зарядов.

Представим себе проводник в виде плоской ленты, расположенный в магнитном поле. Линии напряженности магнитного поля пересекают проводник перпендикулярно к его плоскости. По проводнику течет ток, следовательно, подвижные заряды обладают конечной дрейфовой скоростью $\mathbf{v}$.

На рис. 3.43 проводящая лента изображена в плоскости листа, магнитное поле направлено от нас, за лист, ток течет, как показано стрелкой, слева направо. Пусть носителями тока являются электроны (рис. 3.43, *а*). Тогда направление дрейфовой скорости электронов будет справа налево. При таком направлении скорости в указанном магнитном поле электроны будут испытывать действие лоренцовой силы $\mathbf{f}_л$, направленной вверх. Верхний срез проводника будет заряжаться отрицательно, нижний — положительно.

Из рис. 3.43, *б* видно, что при том же направлении тока, но положительном знаке подвижных зарядов (значит, в частности, при дырочной проводимости), знаки зарядов на срезах проводника сверху и снизу меняются: направление $\mathbf{f}_л$ будет тем же, но теперь вверх будут отклоняться положительные заряды. Это и позволяет экспериментально определять знак электрического заряда носителей тока в проводнике.

Заметим, что и при равной концентрации носителей обоих зарядов холловская разность потенциалов возникает, если дрейфовая

скорость носителей заряда разных знаков различна, что, как правило, имеет место.

Подсчитаем величину холловской разности потенциалов $\Delta\varphi$ между верхним и нижним срезами проводника для простейшего случая носителей тока одного знака заряда. Обозначим через E_x электрическое поле, обусловленное холловской разностью потенциалов $\Delta\varphi$. Обозначая через h ширину ленты — проводника, имеем

$$\Delta\varphi = E_x h. \tag{36.23}$$

Перераспределение зарядов прекратится (а следовательно, установится значение $\Delta\varphi$), когда электрическая сила, обусловленная полем E_x, т. е. eE_x, будет равна по величине и противоположна по направлению лоренцовой силе $\mathbf{f}_л$. Имеем, следовательно,

$$eE_x = f_л = keBv$$

или

$$E_x = kBv. \tag{36.24}$$

Вспомним теперь, что плотность тока j равна

$$j = \frac{I}{S} = nve,$$

где S — поперечное сечение проводника, n — плотность носителей тока, v — дрейфовая скорость. Определяя отсюда v и подставляя найденное значение в (36.24), получаем

$$E_x = \frac{k}{ne}\frac{IB}{S} = \frac{k}{ne} jB. \tag{36.25}$$

Это дает в соответствии с (36.23)

$$\Delta\varphi = \frac{k}{ne}\frac{I}{S} hB = \frac{k}{ne} jhB. \tag{36.26}$$

Таким образом, холловская э.д.с. пропорциональна плотности тока, ширине проводника и индукции магнитного поля.

Исследования проводимости металлов с помощью эффекта Холла привели к удивительным выводам: металлы, как и полупроводники, могут обладать проводимостью p-типа! Это относится к металлам с перекрывающимися зонами (см. § 28), у которых дырочная проводимость может превалировать над электронной. В таких металлах, как цинк и кадмий, дырки в среднем более подвижны, чем электроны.

§ 37. Удельный заряд и масса электрона. Масс-спектроскопия

На заряд e, помещенный в электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$, действует сила

$$\mathbf{f}_{эл} = e\mathbf{E}. \tag{37.1}$$