

Разделив обе части (7.5) на n , преобразуем его к виду

$$\frac{1}{F} - \frac{n_{2,1}}{F'} = \frac{1 - n_{2,1}}{R}. \quad (7.5a)$$

Из (7.5a) видно, что положение изображения зависит не от абсолютных значений n и n' , а от их частного

$$n_{2,1} = \frac{n'}{n}, \quad (7.6)$$

представляющего собой относительный показатель преломления второй среды относительно первой (см. § 5).

Как пример применения формулы (7.5) рассмотрим еще отражение в сферическом зеркале. Подставляя $n' = -n$ и сокращая на n , получаем формулу сферического зеркала

$$\frac{1}{F} + \frac{1}{F'} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}. \quad (7.7)$$

Величина $f = \frac{R}{2}$ называется главным фокусным расстоянием зеркала. При $F = \infty$ будет $F' = f$, т. е. параллельные

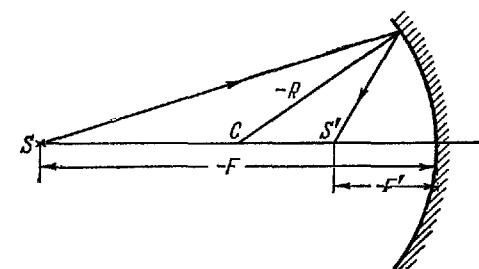


Рис. 1.35.

лучи сходятся в главном фокусе на расстоянии f от зеркала. Если же поместить источник в главный фокус, т. е. $F = f$, то $F' = \infty$ и после отражения расходящийся пучок лучей становится параллельным. На рис. 1.35 изображен случай отражения далекой точки S в вогнутом зеркале. При этом все три отрезка F , F' и R ,

входящие в формулу (7.7), считаются отрицательными и изображение S' расположено в той же среде, что и источник S , т. е. является действительным.

Для плоского зеркала $R = \infty$ и $F' = -F$, т. е. изображение мнимое и расположено симметрично за зеркалом.

§ 8. Построение изображений и дефекты линз

Линзой называется тело с определенным показателем преломления n , ограниченное двумя сферическими (иногда цилиндрическими) поверхностями. Линия, проходящая через центры кривизны обеих поверхностей, называется главной оптической осью линзы.

Методы геометрической оптики позволяют установить основные оптические характеристики линз по отношению к источникам (предметам), расположенным вблизи от оптической оси. Рассмотрим, в первую очередь, тонкую линзу, у которой расстояние между ограничивающими поверхностями мало по сравнению с диаметром линзы.

На рис. 1.36 изображена тонкая выпукло-вогнутая линза (мениск), у которой радиусы передней R_1 и задней R_2 поверхностей положительны. Расчет будем вести в общем виде, пригодном для

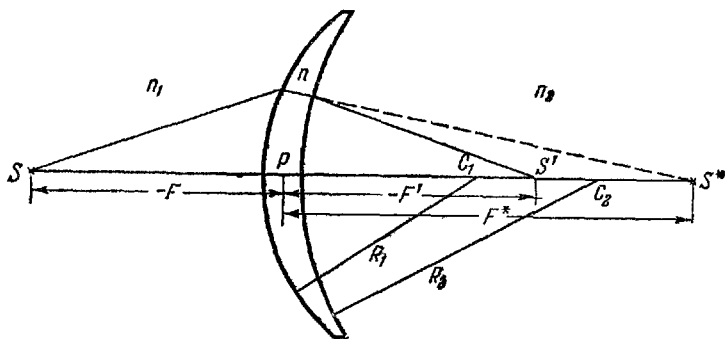


Рис. 1.36.

линз любой формы (двояковыпуклой, плосковогнутой и т. д.). Так как линза тонкая, то отсчет расстояний до предмета $-F$ и до изображения $-F'$ можно вести практически от одной точки P — оптического центра линзы. Показатели преломления сред, расположенных перед и после линзы, обозначим соответственно через n_1 и n_2 .

Лучи, исходящие от источника света S , лежащего на главной оптической оси, преломившись на передней поверхности линзы, пересекутся в некоторой точке S^* , расположенной на расстоянии F^* от оптического центра. Величина F^* может быть найдена по общему правилу (7.5):

$$\frac{n_1}{F} - \frac{n}{F^*} = \frac{n_1 - n}{R_1} \quad \text{или} \quad \frac{n}{F^*} = \frac{n_1}{F} + \frac{n - n_1}{R_1}. \quad (8.1)$$

Точка S^* по отношению к задней поверхности линзы является источником (действительным или мнимым) лучей, преломляющихся на этой поверхности. После преломления эти лучи вновь пересекутся в некоторой точке S' , являющейся окончательным изображением источника S , даваемым линзой. Обозначая расстояние от S' до оптического центра через $-F'$ и применяя вновь общее

правило (7,5), получим

$$\frac{n}{F^*} - \frac{n_2}{F'} = \frac{n-n_2}{R_2} \quad \text{или} \quad \frac{n}{F^*} = \frac{n_2}{F'} + \frac{n-n_2}{R_2}. \quad (8.2)$$

Вычитая почленно равенства (8.1) и (8.2) и исключая тем самым величину F^* , характеризующую положение промежуточного изображения S^* , получаем окончательно:

$$\frac{n_2}{F'} - \frac{n_1}{F} = \frac{n-n_1}{R_1} - \frac{n-n_2}{R_2}. \quad (8.3)$$

Это уравнение позволяет найти расстояние до изображения $-F'$, если известно расстояние до предмета $-F$, радиусы кривизны обеих поверхностей линзы R_1 и R_2 , показатель преломления вещества линзы n и показатели преломления сред, расположенных до и после линзы n_1 и n_2 .

Для линзы, расположенной в однородной среде (например, в воздухе), $n_2 = n_1$ и соотношение (8.3) упрощается:

$$\frac{n_1}{F'} - \frac{n_1}{F} = (n-n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Вводя относительный показатель преломления $n_{\text{отн}} = \frac{n}{n_1}$, можно привести формулу линзы к окончательному виду:

$$\frac{1}{F'} - \frac{1}{F} = (n_{\text{отн}} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}. \quad (8.4)$$

Величина

$$(n_{\text{отн}} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} \quad (8.5)$$

называется оптической силой линзы, а обратная ей величина f — главным фокусным расстоянием. Пучок параллельных лучей, идущих от бесконечно удаленного источника ($F = \infty$), сходится в так называемом заднем фокусе линзы на расстоянии $F' = f$ от ее оптического центра. Лучи, исходящие из переднего фокуса линзы ($F = -f$), после преломления пойдут параллельно главной оптической оси ($F' = \infty$).

Если измерять фокусное расстояние f в метрах, то оптическая сила линзы будет измеряться в д и о п т р и я х:

$$1 \text{ диоптрия} = \frac{1}{\text{м}}.$$

Так, например, линза с оптической силой 10 диоптрий имеет фокусное расстояние $f = \frac{1}{10} \text{ м} = 10 \text{ см}$.

При $\frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2}$ главное фокусное расстояние f положительно и мы имеем собирательную линзу. Пример такой собирательной

двояковыпуклой линзы ($\frac{1}{R_2} < 0 < \frac{1}{R_1}$) изображен на рис. 1.37, а. При $f < 0$ получаем рассеивающую линзу. Пример такой рассеивающей двояковогнутой линзы ($\frac{1}{R_1} < 0 < \frac{1}{R_2}$) приведен на рис. 1.37, б.

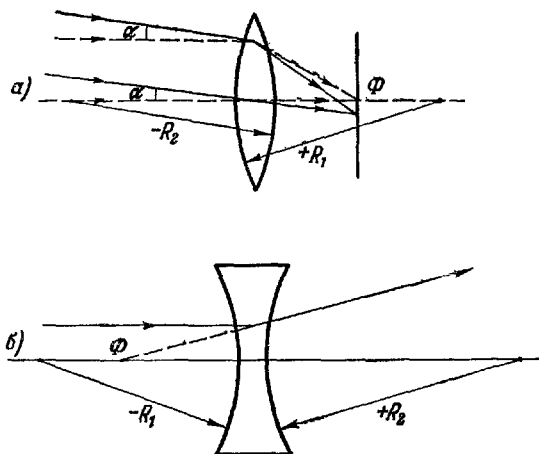


Рис. 1.37.

Пучок параллельных лучей, наклоненных к главной оптической оси под малым углом α , также собирается в одну точку, лежащую в плоскости, проходящей через главный фокус Φ и перпендикулярной к главной оптической оси (рис. 1.37, а). Эта плоскость называется **фокальной плоскостью**.

Если оптические свойства среды перед и после линзы различны, то можно переписать соотношение (8.3) в виде

$$\frac{n_2}{F'} - \frac{n_1}{F} = \frac{n_2}{F} = \frac{n_1}{F'} \quad (8.6)$$

В этом случае переднее f' и заднее f'' фокусные расстояния различны и пропорциональны коэффициентам преломления обеих сред.

Рассмотренные свойства тонких линз позволяют геометрически строить изображения предметов, представляющие собой совокупность изображений всех отдельных точек предмета. Если предмет линейный, то при этом достаточно построить изображения двух его крайних точек.

Для нахождения изображения каждой отдельной точки необходимо геометрически построить пересечение лучей, исходящих из этой точки, после их преломления в линзе. В принципе при этом достаточно найти пересечение каких-либо двух из этих лучей. Практически же, если известны положения оптического центра и главных фокусов, легко построить три луча и проконтролировать себя, проверяя, пересекутся ли все они в одной точке.

Для примера на рис. 1.38 построено изображение линейного предмета AB , получаемое с помощью собирающей линзы. Из общего пучка лучей, исходящих из точки A , выделим три луча: 1, 2 и 3.

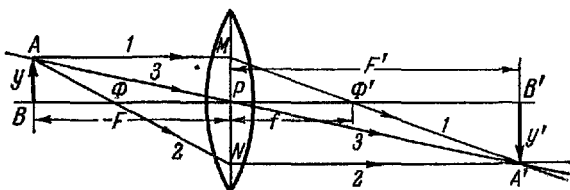


Рис. 1.38.

Луч 1 идет параллельно главной оптической оси и после преломления проходит через задний фокус Φ' . Луч 2 проходит через передний главный фокус Φ и после преломления пойдет параллельно главной оптической оси. Наконец, луч 3, проходящий через оптический центр линзы P , проходит вовсе не преломляясь. Пересечение этих трех лучей дает точку A' , являющуюся изображением края A предмета. Опуская из A' перпендикуляр на главную оптическую ось, найдем точку B' , являющуюся изображением второго края предмета B .

Предмет AB на рис. 1.38 помещен на расстоянии F , большем главного фокусного расстояния f . Как видно из чертежа, в этом случае изображение предмета $A'B'$ увеличенное и перевернутое. Так как точки изображения являются пересечениями самих лучей, а не их продолжений, то такое изображение будет действительным.

Построение рисунка 1.38 позволяет определить поперечное увеличение Y , даваемое линзой, как отношение размера изображения y' к размеру предмета y . Из подобия прямоугольных треугольников $\triangle AB\Phi \sim \triangle \Phi PN$, $\triangle MP\Phi' \sim \triangle \Phi'A'B'$ и $\triangle ABP \sim \triangle PA'B'$ находим, что

$$Y = \frac{y'}{y} = \frac{-F-f}{f} = \frac{f}{F-f} = \frac{F'}{-F}. \quad (8.7)$$

В зависимости от расположения предмета по отношению к переднему главному фокусу увеличение Y может быть как больше,

так и меньше единицы. В последнем случае изображение является уменьшенным.

Для определения углового увеличения линзы построим пучок лучей от источника S , расположенного на оптической оси, расходящихся под углом α (рис. 1.39). После преломления в линзе они превратятся в пучок лучей, сходящихся под углом α' . Угловым увеличением A будем называть отношение тангенсов этих углов. Из чертежа следует, что

$$A = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{h/F'}{h/-F} = \frac{-F}{F'} = \frac{1}{Y}. \quad (8.8)$$

Чем дальше получается изображение предмета, тем больше его поперечные размеры и тем меньше угловые.

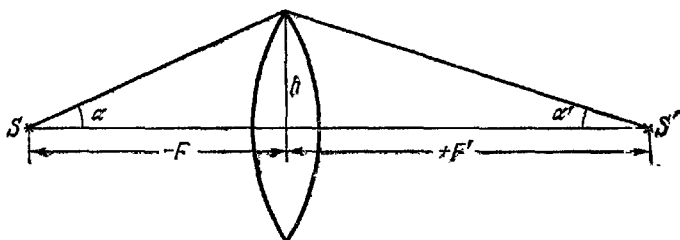


Рис. 1.39.

Для вычисления продольного увеличения $X = \frac{x'}{x}$, т. е. отношения продольного размера изображения x' к продольному размеру предмета x , заметим, что тангенсы углов пропорциональны отношению поперечных размеров y к продольным x . Следовательно,

$$A = \frac{Y}{X} \quad \text{и} \quad X = \frac{Y}{A} = Y^2. \quad (8.9)$$

Лучистый поток от светящейся точки распространяется во все стороны, и лишь некоторая часть его, в зависимости от диаметра линзы, проходит через последнюю. Изображение удаленного предмета, получаемое собирающей линзой, находится около фокуса и имеет линейные размеры

$$y' = y \frac{F'}{-F} \approx \left| \frac{y}{-F} \right| f \sim f. \quad (8.10)$$

Площадь этого изображения

$$S \sim (y')^2 \sim f^2. \quad (8.11)$$

Световой поток, проходящий через линзу, пропорционален площади поперечного сечения линзы

$$\Phi = E_0 \pi D^2 \sim D^2, \quad (8.12)$$

где E_0 — освещенность входного зрачка AB .

Отсюда, согласно (4.10), освещенность изображения

$$E = \frac{\Phi}{S} \sim \frac{D^2}{f^2} \quad (8.13)$$

пропорциональна отношению квадрата диаметра линзы к квадрату ее фокусного расстояния. Это отношение $\frac{D^2}{f^2}$ называется с в е т о с и л о й линзы. Если входной зрачок ограничен диафрагмой, то под D следует понимать диаметр диафрагмы.

С другой стороны, если пренебречь потерями на поглощение и рассеяние лучистого потока, то яркость изображения должна быть равна яркости предмета. Действительно, рассмотрим участок поверхности ds предмета, имеющий яркость B . В оптическую систему попадет от этой площадки лучистый поток $d\Phi = B \cdot ds \cdot d\Omega$, где $d\Omega$ — телесный угол, под которым видна эта площадка. В линзе (или системе линз) изменяются линейные и угловые размеры так, что изображение участка ds имеет площадь ds_1 и его яркость

$$B_1 = \frac{d\Phi}{ds_1 d\Omega_1} = B \cdot \frac{ds}{ds_1} \cdot \frac{d\Omega}{d\Omega_1} = B \cdot \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{A^2}, \quad (8.14)$$

поскольку площади преобразуются как квадраты линейных размеров, а телесные углы — как квадраты линейных углов. Из соотношения (8.8) тогда следует, что

$$B_1 = B. \quad (8.15)$$

При выводе основных соотношений для линзы (8.5), (8.7)—(8.10) и (8.13) предполагалось, что пучок лучей, исходящих из каждой светящейся точки, после преломления сходится в определенной точке изображения. Такое изображение называется с т и г м а т и ч е с к и м.

Из рассуждений предыдущего параграфа следует, что это предположение выполняется лишь приближенно для узких пучков лучей, идущих вблизи главной оптической оси (п а р а к с и а л ь н ы х л у ч е й). Для увеличения светосилы линзы надо увеличивать входной зрачок и использовать лучи, падающие под большими углами к поверхности, когда приближение (7.2) становится неточным.

Поэтому в реальных линзах наблюдаются различные искажения изображения, объединяемые общим термином д е ф е к т о в л и н з. Мы рассмотрим некоторые основные типы дефектов линз.

1. Сферическая аберрация. На рис. 1.40 показан ход лучей от источника S , расположенного на оптической оси, преломляющихся в собирательной линзе большой светосилы.

Параксиальные лучи пересекаются в точке, находящейся на расстоянии f_0 от оптического центра линзы. Для лучей, более удаленных от оптической оси, при преломлении должно оставаться тем же самым отношение синусов углов. Так как $\sin \alpha$ возрастает медленней, чем α , то для этих лучей отношение углов возрастает и они сильнее отклоняются, пересекаясь

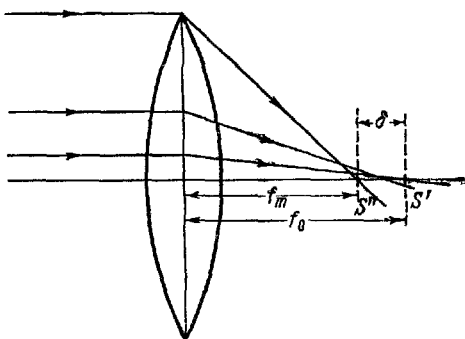


Рис. 1.40

во все более близких точках оптической оси. Самые крайние лучи пересекутся в точке S'' , и изображением светящейся точки S будет не точка, а целый отрезок $S'S''$. Этот отрезок $\delta = f_m - f_0$ является мерой сферической аберрации. Для собирающей линзы $\delta < 0$, а для рассеивающей $\delta > 0$.

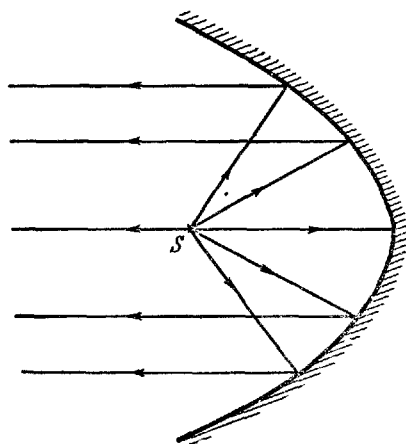


Рис. 1.41.

Наличие сферической аберрации делает несколько неопределенными понятия фокуса и фокальной плоскости линзы. На экране, перпендикулярном к оптической оси, изображение будет не точечным, а иметь вид неравномерно освещенного кружка, диаметр которого будет минимальным не у точки S' , а несколько ближе к линзе.

Для уменьшения сферической аберрации можно диафрагмировать пучок, ограничивая

его лучами, близкими к параксиальным. Однако введение диафрагмы снижает светосилу линзы.

Другим способом борьбы со сферической аберрацией является комбинирование собирающей ($\delta < 0$) и рассеивающей ($\delta > 0$) линз. При этом можно крайние лучи свести в ту же точку, что

и параксиальные ($\delta=0$), и уменьшить aberrацию промежуточных лучей.

Сферической aberrацией обладают не только преломляющие линзы, но и отражающие неплоские зеркала. Поэтому в прожекторах часто используют не сферические, а параболические зеркала. При помещении источника света в фокусе параболоида сферическая aberrация становится равной нулю и все лучи, отраженные от внутренней поверхности параболоида, идут далее строго параллельным пучком (рис. 1.41).

2. Астигматизм. Сферическая aberrация является частным случаем более общего дефекта линз, называемого астигматизмом. Рассмотрим преломление лучей, идущих от источника S , расположенного на некотором расстоянии от оптической оси (рис. 1.42). До преломления лучи исходят из точки S по радиусам (гомоцентрический пучок), и перпендикулярные к ним волновые поверхности являются строго сферическими. После преломления волновые поверхности становятся поверхностями двоякой кривизны. Такая поверхность двоякой кривизны будет сходиться с различной скоростью во взаимно перпендикулярных направлениях. В результате на некотором расстоянии за линзой эта поверхность сойдется в узкую горизонтальную ленточку S' . Далее волновая поверхность в вертикальном направлении начнет расширяться, а в горизонтальном будет еще продолжать

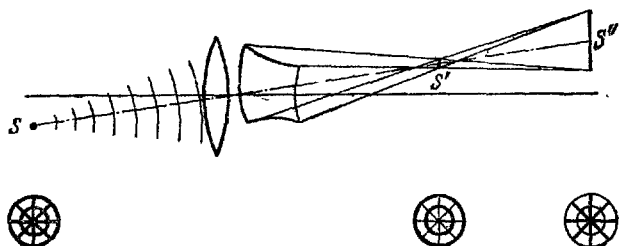


Рис. 1.42.

сжиматься и на некотором расстоянии превратится в узкую вертикальную линию S'' . За S'' волновая поверхность будет расходиться и в горизонтальном и в вертикальном направлениях.

Если рассматривать через такую линзу сетку, состоящую из радиусов и колец с центром на оптической оси, то в плоскости, соответствующей S' , получатся более четкие изображения концентрических кругов, а в плоскости, соответствующей S'' , — более четкое изображение радиальных линий.

Для компенсации астигматизма объективы фотографических аппаратов составляют из нескольких линз с различной кривизной

и показателями преломления. В хороших фотообъективах — астигматах — при большом поле зрения устраняется и искривление плоскости изображения.

Для цилиндрических линз осевая симметрия преломленного пучка всегда нарушается и получается астигматическое изображение. Поэтому при наличии сильного природного астигматизма глаза для компенсации применяют очки с цилиндрическими стеклами.

3. *Коматизация*. Реальные линзы создают искажения и других типов, с которыми приходится бороться. Так, светящаяся точка, расположенная не на оптической оси и посылающая широкий пучок, дает изображение в виде светящегося пятнышка с хвостиком, похожее на запятую. Это искажение носит название *комы*. Различное увеличение в центре и на периферии приводит к искажению формы изображения, называемому *дисторсией*. Для борьбы со всеми этими искажениями приходится простые одиночные линзы заменять сложными оптическими системами.

4. *Хроматическая аберрация*. Из (8.5) следует, что оптическая сила и преломление в линзе зависят от ее показателя преломления $n_{\text{отн}}$.

Стекла, из которых обычно изготавливаются линзы, обладают определенной дисперсией и для них $n_{\text{отн}}$ и f линзы зависят от длины волны λ падающего света. При падении на линзу белого света отдельные составляющие его монохроматические лучи будут фокусироваться в различных точках и изображение станет окрашенным.

На рис. 1.43 показана схема хроматической аберрации в собирающей линзе. При нормальной дисперсии в стеклах слабее всего преломляются и имеют наибольшее фокусное расстояние f красные лучи, ближе всего к линзе расположен фокус фиолетовых лучей, а в промежутке располагаются фокусы для всех промежуточных цветов спектра. Экран E , помещенный перпендикулярно к оптической оси, будет давать изображение точки в виде радужного кружка, порядок распределения цветов в котором зависит от расположения экрана.

Ньютон, открывший дисперсию, думал, что зависимость n от λ для всех стекол одинакова и хроматическая аберрация линз неустранима. Как видно, например, из вывода формулы сферического зеркала (7.7), при отражении величина показателя преломления сокращается и не входит в окончательные выражения. Поэтому Ньютон предложил объективы телескопов, состоящие из линз

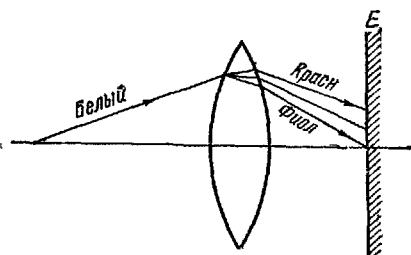


Рис. 1.43.

(рефракторы), заменить зеркалами (рефлекторы), у которых хроматическая аберрация отсутствует.

Основываясь на отсутствии значительной хроматической аберрации для глаза, представляющего собой совокупность различных сред, Эйлер предположил, что зависимость n от λ для каждой среды различна, и рассчитал, каким путем можно скорректировать хроматическую аберрацию линзы. В результате этого в XVIII и XIX вв. был сконструирован ряд объективов, у которых комбинацией собирательных и рассеивающих линз, изготовленных из стекол с разной дисперсией, удастся совместить фокусы лучей двух (ахроматы) и даже трех (апохроматы) различных цветов и тем самым практически ликвидировать хроматическую аберрацию.

Целый ряд дополнительных искажений обусловлен волновой природой света, интерференцией и дифракцией. Возникающие при этом ограничения разрешающей способности линз будут рассмотрены в § 15.

§ 9. Оптические системы

Для исправления многочисленных дефектов изображения, создаваемых одиночной линзой, в оптических приборах применяют системы различных линз, изготовленных из разных сортов стекла. Обычно используются центрированные оптические системы, в которых центры кривизны всех последовательных сферических поверхностей раздела расположены на одной прямой, являющейся оптической осью системы.

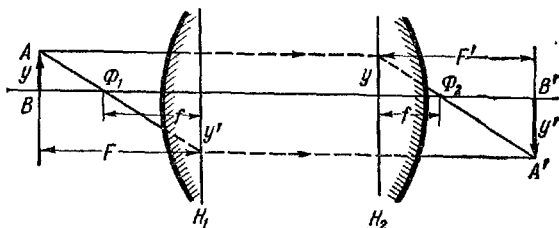


Рис. 1.44.

Такие хорошо скорректированные оптические системы близки к идеальным, т. е. можно практически считать, что пучок лучей, исходящих из светящейся точки A , после многочисленных преломлений внутри системы соберется в одной точке A' , являющейся изображением точки A . Лучи, падающие параллельно оптической оси (от бесконечно удаленного источника), после прохождения оптической системы соберутся в одной точке Φ_2 , которая, как и в случае одной линзы, называется задним главным