В следующем параграфе будет показано, что опыт приводит к необходимости пересмотреть и привычные представления о времени. Решением всех этих проблем человечество обязано Эйнштейну.

§ 26. Преобразования Лоренца

Покажем, во-первых, что найденный на опыте факт постоянства скорости света требует пересмотра не только привычных представлений о геометрии мира (возможно имеющее место сокращение Лоренца — Фицджеральда), но и представлений о времени.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета: S с осями XYZ и началом в точке O и S' с осями $X'Y'Z'$ с началом в точке O'. Все соответствующие оси параллельны, как показано на рис. 1.131, и оси X и X' совпадают (для ясности рисунка они несколько смещены). Система S' движется относительно S вправо, вдоль оси X со скоростью v. Времена t и t' в обеих системах отсчитываются от момента, когда точки O и O' совпадали. При $t=t'=0$ в начале координат (общем в этот момент времени!) происходит вспышка света и световой сигнал начинает распространяться во все стороны.

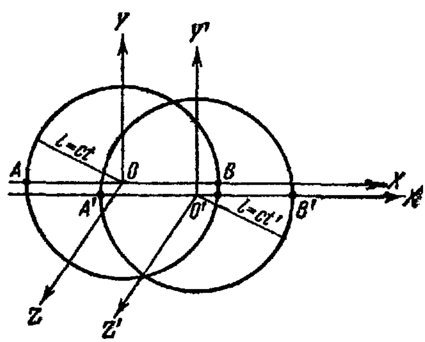

Рис. 1.131.

Сосредоточим свое внимание на осях X и X', вдоль которых происходит относительное перемещение систем S и S'. Отметим на оси X две точки A и B на равном расстоянии l справа и слева от начала координат O. Точно так же отметим точки A' и B' на оси X' на таком же расстоянии от O' справа и слева.

Рассмотрим, в какой последовательности во времени световой сигнал будет достигать точек A, B, A', B'. При этом мы должны будем, в соответствии с опытом, исходить из полного равноправия обеих систем (принцип относительности) и из того, что свет в обеих системах распространяется с одинаковой скоростью во все стороны (принцип постоянства скорости света).

Рассмотрим последовательность событий в системе S.

Световой сигнал здесь достигает точек A и B через одинаковое время $t=l/c$.

Иначе будет обстоять дело с отмеченными точками на оси X'. Точка A' движется навстречу лучу света и будет поэтому освещена раньше. Точка B' удаляется от луча света и будет освещена позже всех. Таким образом, последовательность во времени событий —

попадания луча света на точки — будет такой:

свет достигает точки A' раньше всех;
» » точек A и B одновременно в момент $t=\frac{l}{c}$, позже чем A';
» » точки B' еще позже. (26.1)

Рассмотрим теперь последовательность событий в системе S'. Свет распространяется во все стороны с одинаковой скоростью c. Точек A' и B' световой сигнал достигнет одновременно, через время $t'=\frac{l}{c}$. Точка B движется навстречу лучу света, поэтому световой сигнал достигнет ее раньше. Точка A удаляется от луча света, и световой сигнал придет к ней позже.

Последовательность событий будет следующей:

свет достигнет точки B раньше всех;
» » точек A' и B' одновременно, в момент $t'=\frac{l}{c}$, но позже, чем B;
» » точки A позже всех. (26.2)

Разница в сводках (26.1) и (26.2) разительна и производит очень сильное впечатление. Действительно, все рассматриваемые в них события — достижение световым сигналом той или иной точки — объективны и не могут зависеть от способа их регистрации. Какая же точка зрения правильна? В какой из систем, S или S', регистрация фактов отвечает объективному ходу событий?

Весь человеческий опыт в целом (механические, оптические, электромагнитные и др. явления) свидетельствуют о справедливости *принципа относительности*: законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета и ни одна из них не является преимущественной, абсолютной. Нельзя считать, что одна из двух рассмотренных на рис. 1.131 инерциальных систем, например система S, абсолютно неподвижна и поэтому «на самом деле» свет достигает точек A и B одновременно. Все инерциальные системы равноправны, но *одновременность и последовательность событий в них различна*. Постоянство скорости света во всех инерциальных системах связано с тем, что при переходе от одной системы к другой меняются не только расстояния движущихся точек, но *меняется и течение времени в разных системах*.

С момента своего введения в науку и до начала XX в. понятие *времени* не анализировалось. В частности, считалось, что единое и монотонно текущее время одно и то же для всей Вселенной. Это обстоятельство казалось столь очевидным, что даже не оговаривалось как специальный постулат. Лишь в 1905 г. А. Эйнштейн опроверг это установившееся представление о времени.

Идея Эйнштейна состоит в следующем. Примем в качестве основных постулатов теории следующие два положения:

1. Принцип относительности. В отличие от принципа относительности Галилея будем считать этот принцип универсальным, т. е. относящимся к любым законам природы. Это значит, что не только механические, но и *любые явления подчиняются одинаковым законам в инерциальных системах отсчета.*

2. Принцип постоянства скорости света в вакууме в любых инерциальных системах. Приняв эти постулаты, оправданные всем имеющимся опытом естествознания, необходимо найти правильные преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы к другой. Очевидно, что галилеевский закон преобразования координат (23.6) неверен, так как из него сразу следует (при дифференцировании первых выражений по t) закон сложения скоростей (23 3). Этот закон несовместим со вторым постулатом теории — принципом постоянства скорости света. Рассмотренный выше пример подтверждает правильность того, что и время при переходе от одной инерциальной системы к другой должно преобразовываться.

Задача заключается в отыскании правильных законов преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Эти преобразования могут быть найдены на основе двух исходных постулатов теории.

Примем расположение осей и направление относительной скорости систем отсчета S и S' таким, как на рис. 1.125. Обозначим лишь величину относительной скорости систем не v_0, а для краткости просто v. Будем отсчитывать время в системах S и S' с того момента, когда начала координат совпадали: $t'=t=0$ при $x'=x=0$.

Рассмотрим, во-первых, преобразования координат x и x', вдоль которых происходит относительное перемещение систем. Предположим, что правильное преобразование координат отличается от галилеевского (23.6) множителем γ:

$$x'=\gamma(x-vt), \qquad x=\gamma(x'-v't'). \tag{26.3}$$

Подчеркнем, что равенство множителя γ в обеих формулах и тождественный вид законов преобразования обязательны: тем самым удовлетворяется требование первого постулата — полное равноправие обеих систем отсчета.

Учитывая, что $v'=-v$, перепишем (26.3) так:

$$x'=\gamma(x-vt), \qquad x=\gamma(x'+vt'). \tag{26.4}$$

Для отыскания значения γ прибегнем ко второму постулату. Рассмотрим распространение фронта светового сигнала, начавшего свое движение вдоль осей x и x' из начала координат этих систем в тот момент, когда они совпадали. Обозначая координаты и время фронта сигнала через $x_{\text{сиг}}$, $t_{\text{сиг}}$ и $x'_{\text{сиг}}$, $t'_{\text{сиг}}$, соответственно имеем, согласно второму постулату:

$$x_{\text{сиг}} = ct_{\text{сиг}} \quad \text{и} \quad x'_{\text{сиг}} = ct'_{\text{сиг}}. \tag{26.5}$$

Подставляя (26.5) в (26.4), получим:

$$ct'_{\text{сиг}} = \gamma (c-v)\, t_{\text{сиг}}, \qquad ct_{\text{сиг}} = \gamma (c+v)\, t'_{\text{сиг}}. \tag{26.6}$$

Подставляя далее $t'_{\text{сиг}}$ из первого уравнения (26.6) во второе и сокращая на $t_{\text{сиг}}$, находим искомое значение множителя γ:

$$\gamma = \pm \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{26.7}$$

Мы выбираем в этом выражении знак плюс, что означает попросту сохранение направления отсчета вдоль осей x и x'.

Подставляя это значение γ в (26.4), находим закон преобразования координат x и x':

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{26.8}$$

Перейдем теперь к отысканию законов преобразования времени. Отметим во избежание недоразумений, что формулы (26.6) не являются этими законами: они относятся лишь к рассмотренному частному случаю — распространению фронта светового сигнала. Для нахождения закона преобразования времени можно поступать так. Исключим из уравнений (26.8) координату x', подставив во второе уравнение значение x', следующее из первого. Мы получим уравнение, определяющее зависимость t' от t и x:

$$x = \gamma\,[\gamma (x-vt) + vt'],$$

откуда

$$t' = \gamma t - \frac{x}{v}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) = \gamma t - \frac{x}{v}\,\gamma \frac{v^2}{c^2}.$$

Окончательно

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right). \tag{26.9}$$

Аналогично подставляя значение x из второго уравнения (26.8) в первое, находим выражение t через t' и x':

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right). \tag{26.10}$$

В направлении осей y и y' смещения не происходит. Соотношения между y и y' от времени не зависят, так как эти оси перпендикулярны к вектору относительной скорости. Следовательно, единственные соотношения, которые могут иметь место в соответствии с первым постулатом, это

$$y'=\eta y \quad \text{и} \quad y=\eta y'. \tag{26.11}$$

Отсюда $\eta=\pm 1$. Сохраняя направления отсчета по осям, выбираем положительный знак. Все сказанное в равной мере относится к осям z и z'. Значит, в направлениях, перпендикулярных к вектору скорости, координаты преобразуются тождественно.

Итак, полученные преобразования (систем отсчета рис. 1.125*)), носящие название преобразований Лоренца, имеют вид:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{преобразования} & \text{преобразования} \\ S\to S' & S'\to S \\ x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, & x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ y'=y, & y=y', \\ z'=z, & z=z', \\ t'=\dfrac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. & t=\dfrac{t'+\dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{array}\right\} \tag{26.12}$$

Эти преобразования координат были впервые получены Лоренцом из следующих соображений.

Очевидно, что законы электродинамики (как и механики) должны иметь один и тот же вид во всех инерциальных, равноправных системах отсчета. Однако уравнения микроскопической электродинамики меняют свою форму при галилеевых преобразованиях координат. Лоренц искал такие преобразования координат, которые сохраняли бы неизменными уравнения микроскопической электродинамики. Полученные им преобразования (26.12) удовлетворяют поставленным требованиям, но содержат не только преобразования координат, но и времени.

Однако Лоренц был уверен в правильности старой догмы о том, что время во всех системах отсчета должно течь одинаково. Поэтому преобразование времени он счел фиктивным, а следовательно, и все преобразования (26.12) лишенными физического смысла.

*) В общем случае произвольно направленных осей преобразования Лоренца имеют сложный вид. Для наших целей достаточно принятого на рис. 1.125 удобного расположения осей и направления относительной скорости систем отсчета.

Лишь Эйнштейн сумел понять, что речь идет об истинных временах инерциальных систем S и S', и вывести все вытекающие отсюда следствия. *Величина t есть реальное время системы S, t' — столь же реальное время системы S'.* По предложению Эйнштейна, соотношения (26.12) и были названы преобразованиями Лоренца.

Эти преобразования должны заменить собою противоречащие в общем случае опыту преобразования Галилея (23.6). Однако это не означает, что преобразования Галилея всегда неверны. Преобразования Лоренца верны при любых, как малых, так и сколь угодно больших, возможных в природе скоростях. Но при малых скоростях (по сравнению со скоростью света), т. е. когда $v \ll c$, $\frac{v}{c} \ll 1$, членами, содержащими $\frac{v^2}{c^2}$ и $\frac{v}{c^2}$, в (26.12) можно пренебречь, и преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Значит в той области, в которой они были установлены опытом, т. е. для скоростей, не превышающих тысяч километров в секунду, преобразования Галилея верны, являясь предельным случаем $\left(\frac{v}{c} \to 0\right)$ общих преобразований Лоренца.

Особенно важным является следующее отличие преобразований Лоренца от преобразований Галилея. В рамках преобразований Галилея расстояние между двумя событиями есть абсолютная величина. Это расстояние не меняется при переходах от одной системы отсчета к другой. То же относится и к промежутку времени между этими событиями.

Из преобразований Лоренца следует, что как расстояние, так и промежуток времени между двумя событиями меняются при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом оказывается, что пространственные и временны́е отношения событий уже не независимы. В закон преобразования координат входит время, в закон преобразования времени — пространственные координаты. Устанавливается взаимосвязь пространства и времени.

Существенно, что абсолютные величины не исчезают. Но, как будет показано, абсолютные, т. е. не зависящие от системы отсчета, величины, характеризующие пространственно-временну́ю связь событий, построены из относительных — расстояний и промежутков времени.

Поясним геометрически обнаруживаемую преобразованиями Лоренца взаимосвязь пространства и времени. Рассмотрим на плоскости точки a и b, расстояние между которыми равно l (рис. 1.132).

Проекции отрезка ab на координатные оси, скажем $x_b - x_a$, не остаются неизменными при преобразованиях координат. В штрихованных координатах это проекции

$$x'_b - x'_a \neq x_b - x_a, \qquad y'_b - y'_a \neq y_b - y_a.$$

Эти проекции геометрически есть величины относительные — они зависят от выбора системы координат. Но абсолютная геометрическая величина, характеризующая взаимное положение точек a и b — расстояние между ними l, выражается через эти относительные величины:

$$l^2=(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2=(x_b'-x_a')^2+(y_b'-y_a')^2. \qquad (26.13)$$

Выражение (26.13) не меняется при преобразованиях декартовых координат, хотя его слагаемые изменяются.

Рассмотрим теперь два события A и B. Каждое из них характеризуется в инерциальной системе S точкой в пространстве, в которой это событие произошло, с координатой — x_A и x_B, и моментом, когда оно произошло,— t_A и t_B. В системе S расстояние x между событиями

$$x=x_B-x_A, \qquad (26.14)$$

а время между ними

$$t=t_B-t_A. \qquad (26.15)$$

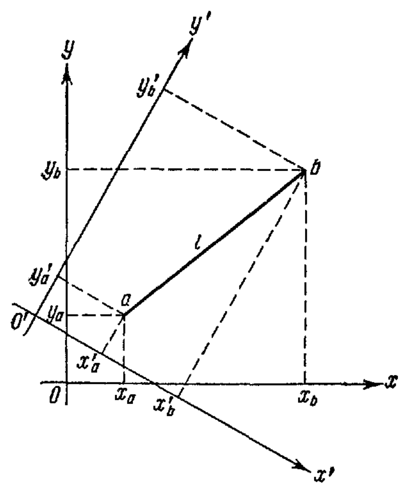

Рис 1 132

В ньютоновой механике и величина x, и промежуток времени t сохранялись при переходах от одной инерциальной системы к другой. Теория относительности показывает, что в действительности эти величины (расстояние между точками в пространстве и промежуток времени между событиями) относительны и зависят от системы отсчета, в которой они определяются. Как уже указывалось, это не означает, что в теории относительности нет абсолютных отношений. Наоборот, теория относительности устанавливает величины, характеризующие абсолютные, не зависящие от систем отсчета отношения, имеющиеся в природе.

Такой абсолютной величиной, связывающей два события A и B, является и н т е р в а л s_{AB}, определяемый следующим образом:

$$s_{AB}^2=c^2(t_B-t_A)^2-(x_B-x_A)^2. \qquad (26.16)$$

Интервал между двумя событиями не меняется при переходе от одной инерциальной системы S к другой S':

$$c^2(t_B'-t_A')^2-(x_B'-x_A')^2=c^2(t_B-t_A)^2-(x_B-x_A)^2, \qquad (26.17)$$

т. е. он остается неизменным при преобразованиях Лоренца, в чем можно убедиться непосредственно, заменяя, например, штрихованные величины [слева в (26.17)] через нештрихованные с помощью (26.12). Но промежуток времени между событиями, расстояние между ними меняются при переходе от S к S', как меняются (хотя и по другому закону) составляющие обычного вектора при преобразованиях декартовых координат.

В рассмотренном выше примере такими событиями были, например, в системе S:

Событие O — испускание светового сигнала из точки O (момент времени $t=0$, координата $x=0$).

Событие B — приход светового сигнала в точку B (момент времени $t=\frac{l}{c}$, координата $x=l$).

Интервал, связывающий эти события, равен нулю:

$$s_{OB}^2=c^2\left(\frac{l}{c}\right)^2-l^2=0.$$

В системе S' и расстояние между событиями O и B будет иным, и время между ними изменится, но интервал останется неизменным — равным нулю.

Как меняются длины и промежутки времени при переходе от одной инерциальной системы координат к другой, т. е. при преобразованиях Лоренца, будет показано в следующем параграфе.

§ 27. Релятивистская кинематика

Механику (электродинамику), основанную на принципе относительности, одинаковости скорости света во всех инерциальных системах и преобразованиях Лоренца, принято называть р е л я т и в и с т с к о й (от латинского relativ — отношение). Законы релятивистской механики в общем случае существенно отличаются от законов классической механики Галилея — Ньютона:

1. В классической механике считалось, что тела могут двигаться с любыми, сколь угодно большими скоростями. Однако уже из преобразований Лоренца (26.12) видно, что *относительные скорости тел имеют верхнюю границу*

$$v<c. \tag{27.1}$$

При $v>c$ знаменатели, равные $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, становятся мнимыми и координаты x' и t' теряют физический смысл.

2. *Движущиеся тела изменяют свои размеры.* Для расчета этого изменения рассмотрим твердый стержень, расположенный