т. е. он остается неизменным при преобразованиях Лоренца, в чем можно убедиться непосредственно, заменяя, например, штрихованные величины [слева в (26.17)] через нештрихованные с помощью (26.12). Но промежуток времени между событиями, расстояние между ними меняются при переходе от S к S', как меняются (хотя и по другому закону) составляющие обычного вектора при преобразованиях декартовых координат.

В рассмотренном выше примере такими событиями были, например, в системе S:

Событие O — испускание светового сигнала из точки O (момент времени $t=0$, координата $x=0$).

Событие B — приход светового сигнала в точку B (момент времени $t=\frac{l}{c}$, координата $x=l$).

Интервал, связывающий эти события, равен нулю:

$$s_{OB}^2=c^2\left(\frac{l}{c}\right)^2-l^2=0.$$

В системе S' и расстояние между событиями O и B будет иным, и время между ними изменится, но интервал останется неизменным — равным нулю.

Как меняются длины и промежутки времени при переходе от одной инерциальной системы координат к другой, т. е. при преобразованиях Лоренца, будет показано в следующем параграфе.

§ 27. Релятивистская кинематика

Механику (электродинамику), основанную на принципе относительности, одинаковости скорости света во всех инерциальных системах и преобразованиях Лоренца, принято называть **релятивистской** (от латинского relativ — отношение). Законы релятивистской механики в общем случае существенно отличаются от законов классической механики Галилея — Ньютона:

1. В классической механике считалось, что тела могут двигаться с любыми, сколь угодно большими скоростями. Однако уже из преобразований Лоренца (26.12) видно, что *относительные скорости тел имеют верхнюю границу*

$$v<c. \tag{27.1}$$

При $v>c$ знаменатели, равные $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, становятся мнимыми и координаты x' и t' теряют физический смысл.

2. *Движущиеся тела изменяют свои размеры.* Для расчета этого изменения рассмотрим твердый стержень, расположенный

вдоль оси $O'X'$ и движущийся вместе с системой отсчета S' (рис. 1.125). Относительно этой системы стержень покоится, его концы имеют неизменные координаты x'_1 и x'_2 и длина стержня

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \text{const}; \tag{27.2}$$

штрих показывает, что длина l измеряется в системе отсчета S', индекс нуль — что в данной системе отсчета стержень покоится.

Будем теперь измерять длину этого стержня в системе отсчета S, относительно которой он движется с постоянной скоростью v. Для этого необходимо измерить координаты его концов x_1 и x_2 в системе S в один и тот же момент времени этой системы t. Из примера, разобранного в предыдущем параграфе, следует, что эти события будут в системе S' неодновременными! Используя преобразования Лоренца (26.12), имеем:

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где l — искомая длина стержня, измеряемая в системе S. Отсюда следует, что длина стержня l, движущегося со скоростью v относительно системы отсчета S, связана с длиной неподвижного стержня l'_0 соотношением

$$l = l'_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{27.3}$$

Из симметрии преобразований Лоренца следует, что если бы стержень длиной l_0 покоился в системе S и мы измеряли бы координаты его концов в движущейся системе S' в один и тот же момент времени *этой* системы t', то его длина l' по отношению к l_0 укоротилась бы в то же число раз:

$$l' = l_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{27.3'}$$

— равноправие систем, требуемое принципом относительности, строго соблюдается. Убедиться в этом можно непосредственным расчетом, подобным приведенному, что мы и рекомендуем читателю. В направлениях, перпендикулярных к вектору скорости (OY, OZ), изменений размеров тел не происходит.

При малых скоростях движения ($v \ll c$) $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cong 1$, и релятивистскими сокращениями длин движущихся тел можно пренебречь. Так, релятивистское сокращение диаметра Земли в направлении ее движения по орбите при скорости 30 *км/час* таково, что уменьшение диаметра составляет всего 6,5 *см*. При v, близком к c, это сокращение становится существенным. Так, при относительной скорости двух инерциальных систем $v = \sqrt{\frac{3}{4}}\,c \cong 260\,000$ *км/сек* $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ и метр, покоящийся в одной системе, будет иметь в другой длину $\frac{1}{2}$ *м*.

В соответствии с принципом относительности эти сокращения взаимны. Каждый наблюдатель, связанный с одной из этих систем отсчета, будет находить метр, покоящийся относительно него, вдвое более длинным, чем метр, пролетающий мимо со скоростью

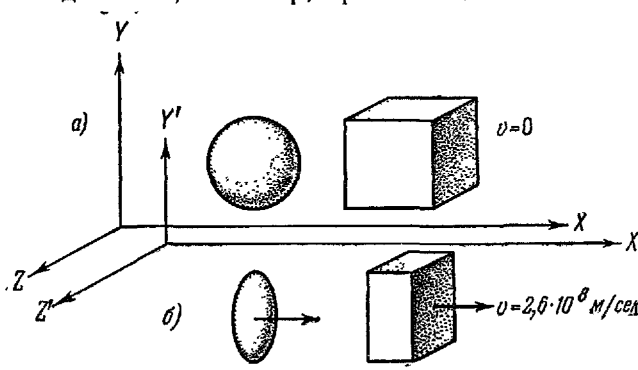

Рис. 1.133.

260 000 *км/сек* (речь идет о метрах, расположенных в направлении вектора относительной скорости; метры, расположенные ортогонально этому направлению, не меняются).

На рис. 1.133 изображены сфера и куб в системе, относительно которой они покоятся (рис. 1.133, *а*), и в системе, относительно которой они движутся со скоростью $v = 260\,000$ *км/сек* (рис. 1.133,*б*). При такой скорости продольные размеры тел укорачиваются вдвое и шар превращается в сплюснутый эллипсоид, а куб — в параллелепипед. Любопытно, что лишь через 54 года после открытия этих эффектов (в 1959 г.) было обнаружено, что речь идет только об истинной форме тел в заданной системе координат, н о н е о в и д и м о й и х ф о р м е.

Различие времени прохождения света от разных точек тела нацело компенсирует изменение его размеров. Тело не меняет в и д и м о й формы, но представляется несколько повернутым. Видимая форма тел менялась бы, если бы правильными были законы механики Ньютона, т. е. истинные размеры тел не зависели от их относительной скорости, а к свету был применим закон сложения скоростей.

Скорости такого порядка, при которых сокращение размеров движущихся материальных частиц становится заметным, носят название **релятивистских** скоростей, и в настоящее время они достигнуты в крупных масштабах в лабораторной практике и в новых промышленных аппаратах. Так, в ядерных реакторах атомных электростанций быстрые нейтроны движутся со скоростями, для которых $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0{,}997$, т. е. сокращение длин порядка 0,3%. Для протонов, ускоренных синхрофазотроном в г. Дубна под Москвой, $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx\frac{1}{11}$. Для легких частиц — электронов — при меньших энергиях получают $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx\frac{1}{500}$. «Сильно релятивистские» частицы приходящих на Землю космических лучей имеют $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx 10^{-7}$ и их продольные размеры сокращаются в 10 миллионов раз.

Для быстро летящих заряженных частиц подобной продольной деформации подвергается и сопровождающее их электромагнитное поле. На рис. 1.134 изображены линии поля и постоянного

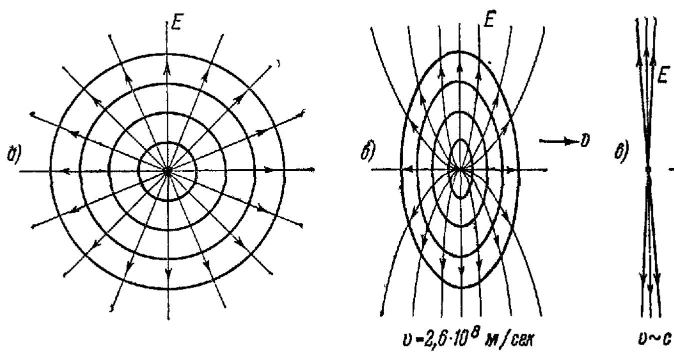

Рис. 1.134.

потенциала ($\varphi=\text{const}$) электрического поля «точечного» заряда, когда он неподвижен (рис. 1.134, *а*), движется с не слишком большой скоростью (рис. 1.134, *б*) и со скоростью, очень близкой к скорости света (рис. 1.134, *в*). Если в первом случае поле сферически симметрично, то в последнем оно практически сжимается в «лепешку», перпендикулярную к направлению движения.

Эту деформацию электромагнитного поля можно обнаружить на опыте. «Сильно релятивистская» частица будет взаимодействовать с неподвижным пробным зарядом q', помещенным на ее пути, лишь в течение очень короткого времени, когда «лепешка» силовых линий проходит через q'. Основанный на этих представлениях точный расчет явлений излучения релятивистскими частицами при их прохождении в веществе приводит к результатам, хорошо совпадающим с опытом. Это является прямым экспериментальным подтверждением правильности выводов теории относительности о сокращении длин при движении.

3. *В движущейся системе изменяется ход течения времени.* Пусть в некоторой точке x_0' движущейся системы $O'X'Y'Z'$ произошли два последовательных события в моменты времени t_1' и t_2'. Для простоты будем говорить о показаниях часов, помещенных в точку x_0' и неподвижных относительно S'. Промежуток времени между этими событиями в S' равен

$$\Delta t_0' = t_2' - t_1'. \qquad (27.4)$$

Рассматривая эти события в инерциальной системе S, относительно которой часы движутся со скоростью v, необходимо учесть, что оба события будут происходить в различных точках с некоторыми координатами x_{01} и x_{02}. Поэтому для промежутка времени между этими событиями Δt в системе S имеем, согласно (26.12):

$$\Delta t = t_2 - t_1 =$$
$$= \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (27.5)$$

Из (27.5) видно, что в неподвижной системе эти два события будут разделены промежутком времени в $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ большим. Следя из системы S за движущимися относительно нее часами, мы обнаружим, что эти часы идут медленнее. Так, при $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 10$, в то время как наши часы отметят промежуток времени в 10 мин., быстро движущиеся часы отметят всего лишь одну минуту.

При больших относительных скоростях различие в течении времени может быть сколь угодно большим.

Представим себе звезду, находящуюся от Земли на расстоянии 1000 световых лет (т. е. на таком расстоянии, что свет от звезды доходит до Земли за 1000 лет). Представим себе, далее, что удалось реализовать фантастический проект и отправить к звезде ракету со скоростью, близкой к скорости света, $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}001$.

По земным часам ракета будет лететь к звезде 1000 лет. Но для материальной системы — ракеты и путешественника в ней — путешествие займет всего один год. Если путешественник, долетев до звезды, повернет к Земле и продолжит свое путешествие с той же скоростью, то он потратит на возвращение еще один год, в то время как на Земле пройдет еще 1000 лет. В результате, постарев на два года, путешественник вернется на Землю через 2000 лет после отправления в путь. Почему в данном случае нарушилась симметрия в процессах на ракете и на Земле?

Земля за время путешествия оставалась и н е р ц и а л ь н о й системой, в то время как ракета ею не была: для того чтобы вернуться к Земле, двигавшаяся к звезде ракета должна была испытать ускорение. Это и уничтожило равноправие, которое имеет место лишь для инерциальных систем.

Расчет показывает, что при полетах в пределах солнечной системы релятивистские эффекты скажутся лишь в виде малых поправок. Но полет даже к ближайшей от Солнца звезде — α Центавра — уже необходимо рассчитывать по релятивистским формулам. Действительно, полет с выключенным двигателем (по инерции) к этой звезде даже при скорости в 1000 *км/сек* потребовал бы 1365 лет. При постоянно работающем двигателе *), сообщающем кораблю ускорение 10 *м/сек*^{2} (самое привычное для экипажа), к цели на первой половине пути и от цели (тормозящее) на второй половине пути (скорость отлета, как и прилета,— нуль), время путешествия будет 3,6 года. Путешествие к α Центавра и обратно потребует 7,2 года, в то время как на Земле пройдет более 10 лет.

Путешествие к галактике Андромеды и обратно потребовало бы при том же ускорении 51,8 года, а при ускорении 30 *м/сек*^{2} — всего 18,66 года — это по собственному времени корабля. Но на Земле при этом прошло бы 1,5 миллиона лет. Дальнейшее увеличение расстояния мало меняет время путешествия, так как средняя часть пути проходится со скоростью, близкой к скорости света, за весьма малое собственное время корабля.

Таким образом, релятивистская кинематика позволяет путешествовать в будущее (но не в прошлое!) и показывает, что нет области вселенной, которая не доступна прямому освоению человечеством. Правда, те, кто отправят межзвездный корабль в путь, ничего не узнают о его открытиях. Но через много лет об этом узнают их потомки.

Экспериментально изменение течения времени проверено на быстро распадающихся частицах, например μ-мезонах, образующихся в верхних слоях атмосферы (см. подробнее гл. XIX, § 73).

---

*) Конструкция такого двигателя — дело будущего, здесь мы обсуждаем лишь принципиальную возможность межзвездных путешествий для человека.

Неподвижный μ-мезон превращается в другие частицы (электрон или позитрон — в зависимости от знака своего электрического заряда — и два нейтрино) в среднем через $2{,}21 \cdot 10^{-6}$ *сек.*

Если бы течение времени в системе отсчета мезона совпадало с течением времени в системе Земли, то даже при скорости света μ-мезон прошел бы путь:

$$s = 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}21 \cdot 10^{-6} = 663 \text{ м},$$

т. е. никогда не смог бы достигнуть нижних слоев атмосферы.

В действительности же μ-мезоны наблюдаются на уровне моря и даже на большой глубине под водой и в шахтах. Происходит это в связи с релятивистским изменением хода времени, обусловленным огромными скоростями мезонов. Секунды между образованием и распадом мезонов по земным часам отвечают стомиллионным долям секунды для мезонов в связанных с ними системах отсчета, т. е. их «собственного времени».

4. **Релятивистский закон сложения скоростей.** Пусть в системе отсчета S' материальная точка движется вдоль оси x' с постоянной скоростью u:

$$\frac{x'}{t'} = u. \tag{27.6}$$

Система S' движется относительно системы S в том же направлении со скоростью v. Определим, чему равна скорость материальной точки w относительно системы S, т. е. чему равно

$$w = \frac{x}{t}. \tag{27.7}$$

Для упрощения вычислений мы положили, что при $t = t' = 0$ материальная точка находится в начале координат, причем $x = x' = 0$; удобный выбор начал отсчета не меняет сути дела.

Имеем согласно (26.12):

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{27.8}$$

Подставляя (27.8) в (27.7), получаем:

$$w = \frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{v}{c^2} x'}.$$

Делим числитель и знаменатель на t':

$$w = \frac{x}{t'} = \frac{\frac{x'}{t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{x'}{t'}}.$$

Но, согласно (27.6), $\frac{x'}{t'}$ есть скорость u точки в системе S'. Стало быть, искомая скорость точки w в системе S выражается через скорость u в системе S' и относительную скорость систем v следующим образом:

$$w=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}. \tag{27.9}$$

Таким образом, равенство (27.9) выражает собой релятивистский закон сложения одинаково направленных скоростей.

При малых скоростях $u \ll c$, $v \ll c$ имеем $\frac{uv}{c^2} \ll 1$ и

$$w \cong u+v, \tag{27.10}$$

т. е. релятивистский закон сложения скоростей переходит в обычный, как этого и следовало ожидать.

Пусть движущаяся в S' материальная точка есть частица излучения—фотон, обладающий скоростью света: $u = c$. Покажем, что в системе отсчета S фотон сохранит ту же скорость (т. е. что $w=c$) и, следовательно, релятивистский закон сложения скоростей удовлетворяет принципу постоянства скорости света. Подставляя в (27.9) $u=c$, имеем:

$$w=\frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}}=c\,\frac{1+\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}=c,$$

т. е. при $u=c$ величина $w=c$, что и требовалось доказать. Покажем далее, что при сложении двух скоростей, каждая из которых сколь угодно близка к скорости света c, результирующая скорость w будет всегда меньше c.

Для доказательства составим разность $c-w$ и преобразуем ее, пользуясь (27.9):

$$c-w=c-\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}=\frac{c}{c^2+uv}\left[c^2+uv-c\,(u+v)\right]=\frac{c\,(c-u)\,(c-v)}{c^2+uv}.$$

Из полученного выражения видно, что пока u и v меньше чем c, эта разность положительна, т. е. w меньше c. Стало быть, скорости света нельзя достигнуть при сложении скоростей, меньших скорости c. Возможная скорость достигает своего максимального значения $w=c$, лишь если $u=c$ или $v=c$.

Из этих выражений следует, что скорость света c является предельной относительной скоростью движения, недостижимой для частиц вещества.

Все изложенное выше показывает, что *законы релятивистской механики в предельном случае малых скоростей* ($v \ll c$) *переходят в законы классической механики.* Классическая механика Галилея—Ньютона была установлена опытным путем для движений макроскопических тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света c. В этих пределах ее законы отражают объективные закономерности природы, и все их следствия с достаточной для практики точностью подтверждаются на опыте.

О применимости этих законов в более широких пределах можно судить лишь на основании опыта. Приведенные в настоящей главе результаты показывают, что опыт опровергает такую возможность в случае больших скоростей. Тем самым *классическая механика не отвергается, но лишь ограничивается определенными пределами применимости:* случаями, когда относительные скорости тел много меньше скорости света. Она верна как частный случай общей механики Эйнштейна — случай малых скоростей.

§ 28. Релятивистская теория некоторых оптических явлений

В § 24 рассматривались некоторые оптические явления в движущихся средах, связанные с ними проблемы «эфирного ветра», и был поставлен вопрос о применимости принципа относительности в оптике. Опыт Майкельсона (§ 25) подтвердил справедливость этого принципа, и можно, возвратившись назад к § 24, рассмотреть, как теория относительности объясняет эти явления.

Такой анализ показывает, что звездная аберрация и эффект Доплера определяются только относительной скоростью источника и наблюдателя. Приведем более детальный расчет важного для практических приложений эффекта Доплера.

Пусть источник монохроматических волн находится в начале координат системы S' и движется вместе с ней со скоростью v вдоль оси x относительно системы S, относительно которой неподвижен наблюдатель. В момент $t' = t = 0$, когда оси координат обеих систем совпадают, источник начал колебаться и испускать монохроматические волны. Колебания электрических зарядов (диполей) в источнике, в системе, в которой он неподвижен, происходят по строго гармоническому закону

$$p = p_0 \sin \omega_0' t', \tag{28.1}$$

где $\omega_0' = 2\pi\nu_0'$ и ν_0' — частота собственных колебаний источника в системе S'.

Испущенные источником электромагнитные волны (свет), распространяясь во все стороны, дойдут до некоторой точки с абсциссой x' спустя некоторое время $\tau' = \frac{x'}{c}$, и колебания электромагнитного поля в этой точке будут запаздывать по фазе;

$$E, H = A \sin \omega_0' (t' - \tau') = A \sin \omega_0' \left(t' - \frac{x'}{c}\right) = A \sin \varphi'. \tag{28.2}$$

Рассмотрим событие, состоящее в том, что в данной точке пространства и в данный момент времени составляющие поля равны нулю. Этот факт не зависит от того, в какой системе отсчета представлены координаты и время события. Событие будет оставаться неизменным при преобразованиях Лоренца.