

Это выражение носит название формулы Планка для лучеиспускательной способности абсолютно черного тела. Из (32.22) и (32.5) можно найти и спектральную плотность энергии равновесного излучения  $\omega(\lambda, T)$ . В предельном случае длинных волн, как было показано выше, формула Планка переходит в формулу Рэлея (32.11), совпадающую в этом случае с опытом. В противоположном предельном случае коротких волн можно пренебречь единицей в знаменателе, и мы получаем:

$$E_{\lambda, T} \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}, \quad (32.23)$$

что совпадает с интерполяционной формулой Вина (32.10), также хорошо оправдывающейся на опыте в этой области. Сопоставляя выведенную им теоретически формулу (32.22) с опытом, Планк определил численное значение универсальной постоянной  $h$ . По уточненным современным данным

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ дж} \cdot \text{сек} = 6,62 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}.$$

Блестящие результаты, достигнутые при применении гипотезы Планка, были первым серьезным указанием на то, что к явлениям лучеиспускания законы классической физики уже неприменимы. Не вытекая из какой-либо законченной теории, не являясь, тем более, теорией, сама по себе гипотеза Планка показывала, что должна быть создана новая теория. В этой новой теории должно быть существенно отражено, что некоторые физические величины способны принимать не непрерывный, но дискретный ряд значений. К этим вопросам мы вернемся в последующих главах. Сейчас же обратимся к формуле Планка, вытекающим из нее следствиям и практическим применениям законов теплового излучения.

### § 33. Законы теплового излучения

На рис. 1.142 изображена серия кривых  $E_{\lambda, T}$  для различных температур излучающего абсолютно черного тела. Согласно формуле Планка

$$E_{\lambda, T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \quad (33.1)$$

для каждой данной длины волны  $\lambda$  с ростом температуры показатель  $\frac{hc}{\lambda kT}$  и величина, стоящая в знаменателе,  $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$ , убывают, а сама дробь возрастает. Следовательно, с ростом температуры возрастает лучеиспускательная способность во всех участках спектра, но в различной степени.

Из формулы Планка вытекают и все остальные законы теплового излучения. Рассчитаем полную лучеиспускающую способность абсолютно черного тела, интегрируя выражение (33.1) по

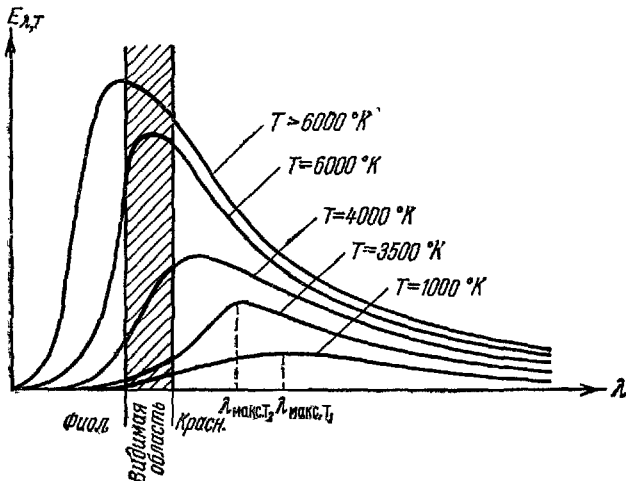


Рис. 1.142.

всем длинам волн. При вычислении введем вспомогательную переменную:

$$z = \frac{\lambda k T}{hc}, \quad \lambda = \frac{hc}{kT} z \quad \text{и} \quad d\lambda = \frac{hc}{kT} dz. \quad (33.2)$$

Подставим эту замену в (33.1) и произведем интегрирование:

$$E_T = \int_0^{\infty} E_{\lambda, T} d\lambda = 2\pi hc^2 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left( e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1 \right)} = 2\pi hc^2 \left( \frac{kT}{hc} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^5 \left( e^z - 1 \right)}.$$

Интеграл, стоящий в правой части, равен  $\frac{\pi^4}{15}$ . Следовательно,

$$E_T = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4. \quad (33.3)$$

Таким образом, из формулы Планка вытекает закон Стефана — Больцмана (32.7). Подставляя численные значения универсальных постоянных, находим величину константы в законе Стефана — Больцмана:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град}^4.$$

Лучистый поток с единицы площади абсолютно черного тела равен

$$\frac{q}{S} = E_T = 5,7 \left( \frac{T}{100^\circ} \right)^4 \text{ вт/м}^2. \quad (33.4)$$

При теплообмене излучением между двумя телами, нагретыми до температур, равных соответственно  $T_1$  и  $T_2$ , тепловой поток на единицу площади равен разности двух противоположных лучистых потоков. В общем случае следует учитывать, что реальные тела не являются абсолютно черными ( $a < 1$ ) и, кроме того, в теплообмене участвует лишь некоторая доля  $\phi$  всей поверхности, зависящая от геометрии их взаимного расположения. Следовательно,

$$\frac{q_{1,2}}{S} = \phi a \cdot 5,7 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (33.5)$$

Геометрический коэффициент  $\phi$  вычислен для ряда типичных взаимных расположений теплообменивающихся поверхностей и эти значения приводятся в курсах строительной теплотехники.

При малых разностях температур равенство (33.5) упрощается. С достаточной для практических расчетов степенью точности можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{q_{1,2}}{S} &= \phi a \cdot 5,7 \left[ \frac{T_1}{100} - \frac{T_2}{100} \right] \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^3 + \left( \frac{T_1}{100} \right)^2 \left( \frac{T_2}{100} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{T_1}{100} \right) \left( \frac{T_2}{100} \right)^2 + \left( \frac{T_2}{100} \right)^3 \right] \approx \phi a \cdot 5,7 \cdot 4 \left( \frac{\bar{T}}{100} \right)^3 \frac{T_1 - T_2}{100} = \\ &= 0,227 \cdot \phi a \left( \frac{\bar{T}}{100} \right)^3 (T_1 - T_2). \quad (33.6) \end{aligned}$$

Величина

$$T_1 - T_2 = \Delta T \quad (33.7)$$

представляет собой перепад температуры между обменивающимися лучистым теплом поверхностями. Множитель

$$0,227 \phi a \left( \frac{\bar{T}}{100} \right)^3 = \alpha_x \quad (33.8)$$

называется коэффициентом теплопередачи при лучеиспускании.

Учитывая (33.7) и (33.8), можно переписать выражение (33.6) в форме, принятой в теплотехнике:

$$q_{1,2} = \alpha_x S \Delta T \text{ дж/сек.} \quad (33.9)$$

В реальных условиях наряду с излучением теплообмен осуществляется теплопроводностью через промежуточную среду и главным образом конвекцией. В последнем случае тепло, переданное конвекцией, определяется выражением, аналогичным

(33.9), с соответствующим коэффициентом теплопередачи  $\alpha_n$ . Таким образом, полный поток тепла равен:

$$q_{1, 2 \text{ полн}} = (\alpha_n + \alpha_k) S \Delta T = \alpha S \Delta T, \quad (33.10)$$

где  $\alpha = \alpha_n + \alpha_k$  есть суммарный коэффициент теплопередачи.

Из (33.8) следует, что, согласно законам теплового излучения, коэффициент теплопередачи излучением  $\alpha_n$  возрастает с нагреванием примерно пропорционально третьей степени абсолютной температуры. Поэтому при невысоких температурах теплотери от нагретых тел обусловлены главным образом конвекцией, а при высоких — лучеиспусканием. Так, в топках печей  $\alpha_n \gg \alpha_k$  и теплопередача от раскаленных топочных газов к поверхностям нагрева происходит в основном за счет лучеиспускания.

При температурах, близких к комнатной,  $T \approx 300^\circ \text{K}$ , коэффициент лучистого теплообмена

$$\alpha_n \approx 0,2 \text{ па} \cdot 3^3 \approx 2 - 5 \text{ вт/м}^2 \cdot \text{град.}$$

Для батарей центрального отопления в жилых помещениях величина  $\alpha_k$  за счет слабой естественной конвекции имеет тот же порядок величины, и нагрев воздуха в помещении происходит до 50% за счет лучистого теплообмена, причем главную роль в последнем играют инфракрасные («тепловые») лучи, испускаемые батареями.

Из формулы Планка (33.1) автоматически вытекает и закон спектрального смещения Вина (32.9). Для этого надо найти положение максимума лучеиспускательной способности  $E_{\lambda, T}$  по длинам волн обычными методами дифференциального исчисления, т. е. решить уравнение

$$\frac{dE_{\lambda, T}}{d\lambda} = 0.$$

Для сокращения расчетов введем подстановку (33.2) непосредственно в формулу Планка (33.1), перепишем ее в виде

$$\frac{h^4 c^3}{2\pi (kT)^5} E_{\lambda, T} = \frac{z^{-5}}{e^z - 1} \quad (33.11)$$

и продифференцируем правую часть этого равенства по  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^{-5}}{e^z - 1} \right) &= \frac{1}{\left( \frac{1}{e^z - 1} \right)^2} \left[ -5z^{-6} \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right) - z^{-5} e^{\frac{1}{z}} \left( -\frac{1}{z^2} \right) \right] = \\ &= \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^6 \left( e^{\frac{1}{z}} - 1 \right)^2} \left[ \frac{1}{z} - 5 \left( 1 - e^{-\frac{1}{z}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Максимуму кривой внутри интервала  $0 \leq \lambda \leq \infty$  соответствует значение  $z$ , обращающее в нуль выражение, стоящее в квадратных скобках, т. е.

$$\frac{1}{z_m} = 5 \left( 1 - e^{-\frac{1}{z_m}} \right). \quad (33.12)$$

В первом приближении решение этого трансцендентного уравнения будет:

$$\frac{1}{z_m} = 5. \quad (33.13)$$

Степень точности этого решения определяется величиной отброшенного члена  $e^{-\frac{1}{z_m}} \approx e^{-5} \approx 0,01$  по сравнению с единицей. В следующем приближении:

$$\frac{1}{z_m} \approx 5(1 - e^{-5}) \approx 4,97.$$

Третье приближение:

$$\frac{1}{z_m} \approx 5(1 - e^{-4,97})$$

— практически не отличается от предыдущего.

Возвращаясь от безразмерного вспомогательного переменного  $z_m$  к размерным величинам, находим:

$$\lambda_m = \frac{hc}{kT} z_m = \frac{hc}{4,97 kT}$$

или

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4,97 k} = 0,00289 \text{ м} \cdot \text{град}. \quad (33.14)$$

На рис. 1.142 показано смещение максимума лучеиспускающей способности с нагреванием абсолютно черного тела в сторону все более коротких длин волн \*).

\*) Вместо распределения энергии  $E_{\lambda, T}$  по интервалам длин волн  $d\lambda$  можно пользоваться распределением энергий  $E_{\nu, T}$  по интервалам частот  $d\nu$ . Однако следует помнить, что эти интервалы не пропорциональны друг другу. Из  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  следует, что  $d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu$ . Энергия, испускаемая в данном интервале длин волн или частот, будет:

$$dE = E_{\lambda, T} d\lambda = E_{\nu, T} d\nu.$$

Отсюда следует, что  $E_{\nu, T}$  и  $E_{\lambda, T}$  не получаются одно из другого простой заменой  $\lambda$  на  $\nu$ , а связаны более сложной зависимостью. Отбрасывая знак (связанный с тем, что при возрастании длины волны частота убывает и

Таблица, вычисленная по формуле (33.14), наглядно показывает это смещение:

$T^{\circ}K$	287	1000	2000	3000	4000	5000	5200	5900	7000	10 000	$10^7$
$\lambda_m$	10 мк	2,89 мк	1,44 мк	0,962 мк	721 нм	577 нм	555 нм	490 нм	413 нм	289 нм	$2,89 \times 10^{-10} \text{ м}$

При комнатной температуре максимум излучения лежит в далекой инфракрасной области, излучение в видимой области практически отсутствует. При температуре, приближающейся к  $1000^{\circ} K$ , максимум по-прежнему в инфракрасной области, однако и излучение в видимой части спектра становится заметным (см. рис. 1.142). В силу того, что интенсивность от длинных, красных, к коротким, фиолетовым, падает, наибольшая интенсивность излучения приходится на красную часть спектра — это температура «красного каления». По мере роста температуры различие в интенсивностях падает, излучение приобретает желтый, а затем белый цвет. При температуре между  $5000$  и  $6000^{\circ} K$  максимум проходит через область спектра, к которой человеческий глаз наиболее чувствителен. Температуре  $5900^{\circ} K$  отвечает температура поверхности Солнца, лучеиспускающая способность которого близка к лучеиспускающей способности абсолютно черного тела. Такое излучение воспринимается глазом как белый, дневной свет. При более высоких температурах максимум смещается в ультрафиолетовую область, а интенсивность в фиолетово-голубой области становится большей, чем в красной. Излучение приобретает голубой оттенок.

Разворачивая излучение в спектр и определяя длину волны, которой отвечает наибольшая энергия излучения, можно определить температуру излучающего абсолютно черного тела или близких к нему по свойствам тел. Так, очевидно, что Солнце и звезды по своим лучеиспускающим свойствам должны быть близки к

обратно), имеем:

$$E_{\nu, T} = E_{\lambda, T} \left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| = \frac{c}{\nu^2} E_{\lambda, T}.$$

Поскольку  $E_{\lambda, T}$  и  $E_{\nu, T}$  — разные функции (отличающиеся множителем  $\frac{c}{\nu^2}$ ), то положения их максимумов не совпадают, т. е.  $\nu_m \neq \frac{c}{\lambda_m}$ .

В оптике удобнее пользоваться функцией  $E_{\lambda, T}$ , поскольку при практическом разложении в спектр с помощью дифракционной решетки пространственное расщепление лучей на экране пропорционально длинам волн  $\lambda$  и воспроизводит ось абсцисс рис. 1.142.

абсолютно черным телам. Действительно, толстая газовая оболочка звезд не может обладать большой отражательной способностью. Следовательно, поглощательная способность звезд должна быть близка к единице. Фотографируя спектр звезды и определяя по почернению пластинки длину волны, отвечающую наибольшей отдаче энергии, определяем достаточно точно температуру звезды.

При определении температуры по формуле Вина можно воспользоваться термозлементом, отыскивая с его помощью то место спектра, в котором излучение несет наибольшую энергию.

### § 34. Пирометры. Тепловые источники света

Для определения высоких температур с помощью законов Стефана — Больцмана или Вина пользуются приборами, получившими название пирометров.

На рис. 1.143 приведена схема радиационного пирометра. При измерениях прибор, расположенный достаточно далеко от источника излучения, наводят на него так, чтобы объектив  $O$  дал на приемнике  $\Pi$  резкое изображение источника  $I$ . При этом изображение обязательно должно перекрыть весь приемник. Оптические системы изменяют линейные и угловые размеры изображения, но при этом его яркость всегда равна яркости источника. Таким образом, если площадь приемника равна  $s$ , то он поглощает ровно столько же энергии, сколько испускает такая же площадка  $s$  излучателя (пренебрегая, конечно, потерями в линзах, которые можно достаточно точно учесть).

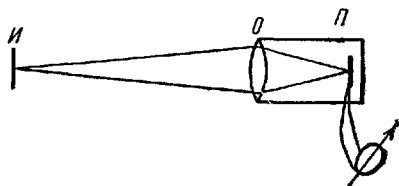


Рис. 1.143.

В качестве приемника в радиационных пирометрах употребляются чаще всего термомпары или болометры. Иногда употребляется и биметаллическая спираль, изгибающаяся при нагревании. Определяя энергию, поглощаемую пирометром, находят по закону Стефана — Больцмана температуру абсолютно черного излучателя.

Точность метода определяется тем, что энергия пропорциональна высокой степени температуры. Логарифмируя и дифференцируя равенство (33.3), получаем:

$$\frac{dE}{E} = 4 \frac{dT}{T}. \quad (34.1)$$

Следовательно, при измерении энергии с относительной точностью  $\frac{\Delta E}{E}$  до 4%, можно определить температуру с точностью  $\frac{\Delta T}{T}$  до 1%.