Глава II

Дифференцирование функций

§ 2.1. Понятие производной

Производная $f'(x)$ функции $y=f(x)$ в данной точке x определяется равенством

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x; при этом она обязательно непрерывна в этой точке.

Геометрически величина производной $f'(x)$ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x.

Число

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

называется *правосторонней* производной в точке x.

Число

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

называется *левосторонней* производной в точке x.

Необходимым и достаточным условием существования производной $f'(x)$ является равенство $f'_-(x)=f'_+(x)$.

Если $f'(x)=\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x бесконечную производную. В этом случае касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке x перпендикулярна к оси Ox.

2.1.1. Найти приращение Δy и отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

а) $y=\sqrt{x}$ при $x=0$ и $\Delta x=0{,}0001$;

б) $y=\frac{1}{x^2+x-6}$ при $x=1$ и $\Delta x=0{,}2$.

Решение. а) $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\sqrt{0{,}0001}=0{,}01$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0{,}01}{0{,}0001}=100.$$

2.1.2. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y=\cos ax$;   б) $y=5x^2-2x$.

Решение. а) $\Delta y = \cos a(x+\Delta x) - \cos ax =$

$$= -2\sin\left(ax + \frac{a}{2}\Delta x\right)\sin\frac{a}{2}\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sin\left(ax+\frac{a}{2}\Delta x\right)\sin\frac{a}{2}\Delta x}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(ax+\frac{a}{2}\Delta x\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{a}{2}\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= -a\sin ax.$$

В частности, если $a=1$, то $y=\cos x$ и $y' = -\sin x$.

2.1.3. Показать, что следующие функции не имеют конечных производных в указанных точках:

а) $y=\sqrt[5]{x^3}$ в точке $x=0$; б) $y=\sqrt[3]{x-1}$ в точке $x=1$;

в) $y=3|x|+1$ в точке $x=0$.

Решение. а) $\Delta y = \sqrt[5]{(x+\Delta x)^3} - \sqrt[5]{x^3}$. В точке $x=0$ имеем $\Delta y = \sqrt[5]{\Delta x^3}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[5]{\Delta x^3}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^2}}$; следовательно, $y'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^2}} = \infty$, т. е. конечная производная не существует.

в) При $\Delta x > 0$ приращение функции Δy в точке $x=0$ выразится так: $\Delta y = 3\ (0+\Delta x)\ + 1 - 1 = 3\Delta x$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$$

При $\Delta x < 0$ приращение функции Δy выразится так:

$$\Delta y = -3\ (0+\Delta x) + 1 - 1 = -3\Delta x,$$

значит,

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -3.$$

Так как односторонние пределы различны, то в точке $x=0$ не существует производной (рис. 34).

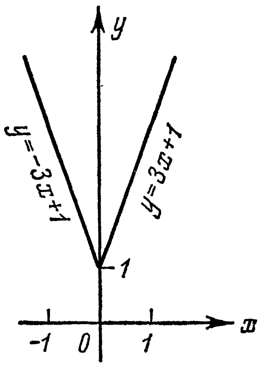

Рис. 34.

2.1.4. Исследовать дифференцируемость функции $y=|\ln x|$ в точке $x=1$.

Решение. При $x=1$

$$\Delta y = |\ln(1+\Delta x)| - |\ln 1| = |\ln(1+\Delta x)|,$$

т. е.

$$\Delta y = |\ln(1+\Delta x)| = \begin{cases} \ln(1+\Delta x) & \text{при } \Delta x \geqslant 0, \\ -\ln(1+\Delta x) & \text{при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \text{при } \Delta x>0,\\ -\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} & \text{при } \Delta x<0,\end{cases}$$

откуда

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

Поскольку односторонние пределы различны, не существует производной. Следовательно, функция $y=|\ln x|$ в точке $x=1$ не дифференцируема (рис. 35).

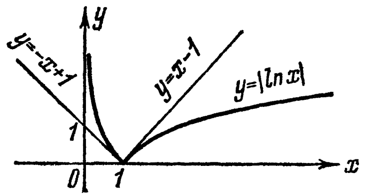

Рис. 35.

2.1.5. Определить среднюю скорость движения, заданного формулой

$$s=(t^2-5t+2)\ \textit{м}$$

от $t_1=5$ *сек* до $t_2=15$ *сек*.

2.1.6. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y=x^3$; б) $y=1/x^2$.

2.1.7. Исследовать дифференцируемость функции $y=|\cos x|$ в точках $x=\pi/2+n\pi$ (n — целое).

§ 2.2. Дифференцирование явно заданных функций

I. Основные правила дифференцирования

1) $c'=0$; 2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 3) $(cu)'=cu'$;

4) $(uv)'=u'v+uv'$; 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

Здесь $c=\text{const}$, а u и v — функции от x, имеющие производные в соответствующей точке.

6) Если функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $y'_x(x_0)=y'_u(u_0)\,u'_x(x_0)$.

II. Дифференцирование основных элементарных функций

1) $(u^n)'=nu^{n-1}u'$; 2) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$; 3) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

4) $(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$; 5) $(\operatorname{ctg} u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$; 6) $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$;

7) $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$; 8) $(e^u)'=e^u u'$; 9) $(\operatorname{sh} u)'=\operatorname{ch} u\cdot u'$;

10) $(\operatorname{ch} u)'=\operatorname{sh} u\cdot u'$; 11) $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}=-(\arccos u)'$;

12) $(\operatorname{arctg} u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}=-(\operatorname{arcctg} u)'$.