

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. С.М. КИРОВА

А.А. КИРСАНОВ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ДИНАМИКУ

Учебное пособие

Псков 1999

ББК 531
К 435

Печатантся по решению кафедр физики, математического анализа и редакционно-издательского совета ПГПИ им. С.М.Кирова.

Научный редактор:

доктор физико-математических наук, профессор **Г.А. Розман**.

Рецензенты:

проректор по учебной работе Псковского политехнического института Санкт-Петербургского технического университета, профессор **А.Н. Верховин**;
заведующая кафедрой математического анализа ПГПИ им. С.М.Кирова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа, Отличник народного образования **Л.И. Сазанова**.

Кирсанов А.А.

К 435 Введение в аналитическую динамику. Учебное пособие.
Псков, 1999.- 304 стр.

К 435

ISBN 5-87854-111-4

- © Псковский государственный педагогический институт им. С.М.Кирова (ПГПИ им. С.М.Кирова), 1999
- © Кирсанов А.А., 1999

Содержание

Предисловие	7
Глава I. Основные понятия	11
§1.1 Пространство и время, инерциальная система отсчёта, принцип относительности Галилея	11
§1.2 Свободные и несвободные системы материальных точек	13
§1.3 Связи и их классификация	14
§1.4 Виртуальные скорости, виртуальные перемещения	20
§1.5 Виртуальная работа, признак идеальности связей	25
§1.6 Обобщённые (Лагранжевы1) координаты	34
§1.7 Обобщённые силы	42
Глава II. Первые три формы основного уравнения	45
§2.1. Первая форма основного уравнения	45
§2.2. Сохранение импульса	47
§2.3. Сохранение момента количества движения	48
§2.4. Первая форма уравнения энергии	49
§2.5. Вторая форма уравнения энергии	51
§2.6. Третья форма уравнения энергии	53
§2.7. Вторая форма основного уравнения	54
§2.8. Третья форма основного уравнения	56
§2.9. Принцип Гаусса наименьшего принуждения	58
Глава III. Уравнения Лагранжа	67
§3.1. Четвёртая форма основного уравнения	67
§3.2. Уравнения Лагранжа	72
§3.3. Консервативные и обладающие потенциальной функцией системы материальных точек	75
§3.4. Функция Лагранжа	78
§3.5. Интеграл Якоби	80
§3.6. Обобщённый потенциал	81
§3.7. Приложения уравнений Лагранжа	84

Глава IV. Методы интегрирования	95
§4.1. Задачи, разрешимые в квадратурах	95
§4.2. Системы с циклическими координатами, уравнения Рауса	97
§4.3. Интегралы количества движения и момента количества движения	102
§4.4. Уравнение энергии	105
§4.5. Уменьшение числа степеней свободы системы материальных точек при помощи уравнения энергии. Метод Уиттекера	107
Глава V. Канонические уравнения Гамильтона	123
§5.1. Уравнения Гамильтона	123
§5.2. Уравнение энергии и явное выражение для функции Гамильтона	129
§5.3. Канонические уравнения при наличии циклических координат	131
§5.4. Задачи на составление функции Гамильтона и канонических уравнений Гамильтона	133
Глава VI. Уравнения Гиббса-Аппеля	145
§6.1. Квaziкоординаты	145
§6.2. Пятая форма основного уравнения	149
§6.3. Определение ускорения	151
§6.4. Уравнение Гиббса-Аппеля	154
§6.5. Приложения уравнений Гиббса-Аппеля	155
Глава VII. Шестая форма основного уравнения	165
§7.1. Шестая форма основного уравнения	165
§7.2. Эквивалентность шестой формы основного уравнения с уравнениями Лагранжа и Гамильтона	166
§7.3. Шестая форма основного уравнения и функция Рауса	168
§7.4. Теорема $\frac{d}{dt}(p_r \delta q_r) = \delta L$	170
§7.5. Принцип Гамильтона	171
§7.6. Главная функция	172
§7.7. Свойства главной функции	175

Глава VIII. Теорема Гамильтона-Якоби	179
§8.1. Уравнение Гамильтона в частных производных	179
§8.2. Теорема Гамильтона-Якоби	181
§8.3. Приложения теоремы Гамильтона-Якоби	188
Глава IX. Уравнения Гамильтона	199
§9.1. Скобки Пуассона	199
§9.2. Теорема Пуассона	202
§9.3. Применение известного интеграла движения	202
§9.4. Интегральные инварианты	205
§9.5. Теорема Лиувилля	210
Глава X. Задача двух тел	215
§10.1. Дифференциальные уравнения движения	215
§10.2. Первые интегралы уравнений относительного движения	218
Интеграл площадей (момента количества движения)	219
Интеграл энергии	220
§10.3. Движение в плоскости орбиты	221
§10.4. Траектория движения	224
§10.5. Движение по эллипсу	228
§10.6. Движение по гиперболе	230
§10.6. Движение по параболе	231
Глава XI. Теория колебаний	233
§11.1. Малые колебания консервативных систем около положения равновесия	233
§11.2. Наложение связи	239
§11.3. Принцип Релея	240
Глава XII. Теория удара	249
§ 12.1. Ударный импульс	249
§ 12.2. Импульсивные связи	251
§ 12.3. Основное уравнение теории удара	253
§ 12.4. Теорема о суперпозиции	256
§ 12.5. Шесть теорем об энергии	257
1. Приращение энергии системы без импульсивных связей ...	257
2. Теорема Карно о потере энергии при наложении связи первого типа	258

3. Выигрыш энергии при наложении связи второго рода	259
4. Теорема Бертрана	260
5. Теорема Кельвина	260
6. Теорема Тейлора	261
§ 12.6. Использование обобщённых координат и квазиординат в теории удара	263
Приложение I.	267
1. Интегрирующий множитель	267
2. Уравнения Пфаффа	270
Приложение II. Однородные функции, теорема Эйлера об однородных функциях	271
Приложение III. Вариационное исчисление	272
1. Условие стационарности интегрального функционала	272
2. Свободные пределы интегрирования	276
3. Функционалы с несколькими неизвестными функциями	277
4. Принцип Гамильтона	279
5. Уравнения Лагранжа	280
6. Уравнение Гамильтона-Якоби	283
7. Уравнения Гамильтона	287
8. Теорема Якоби	289
Приложение IV. Движение по законам Кеплера	291
Приложение V. Формулы для вычисления ускорений в ортогональных координатах	294
Литература.	297
Предметный указатель.	298

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие преследует следующие цели: дать последовательное и достаточно полное изложение курса аналитической динамики; на основе теоретического и практического материала, излагаемого в данном пособии, закрепить практические математические навыки; подготовить читателя к изучению последующих разделов теоретической физики, где полученные знания (наравне с математическими) будут служить уже в качестве инструмента, позволяющего сосредоточить свои усилия в преодолении трудностей, присущих новым разделам теоретической физики.

Учебное пособие предназначено студентам физико-математических факультетов педагогических институтов, но может быть полезно, как справочное пособие, и студентам технических вузов.

«Введение в аналитическую динамику» состоит из 12 глав и Приложения.

В I главе обсуждаются понятия инерциальной системы отсчёта, свободной и несвободной системы материальных точек, связей и их классификаций, виртуальной скорости, виртуального перемещения и виртуальной работы, обобщённых координат и обобщённых сил. Для каждого понятия рассматривается соответствующая ему задача.

Во II главе приводится полученное Лагранжем так называемое *основное уравнение*, которое положено нами в основу построения аналитической динамики. На основании первой формы основного уравнения доказываются теоремы сохранения импульса, момента количества движения и три формы уравнения энергии. Исходя из разнообразия задач, решаемых в рамках аналитической динамики, основное уравнение представляется в шести различных формах. В этой главе анализируются первые три его формы.

В главе III рассматривается четвёртая форма основного уравнения, из которой выводится функция Лагранжа и интеграл (энергии) Якоби.

В IV главе на основании полученных уравнений рассматриваются проблемы интегрирования уравнений движения в элементарных функциях или неопределённых интегралах от элементарных функций, то есть рассматриваются задачи, разрешаемые в квадратурах. Вводится поня-

тие циклических координат и методы понижения числа степеней свободы системы материальных точек при помощи уравнений энергии (метод Уиттекера). С помощью уравнения Лагранжа вводится функция Рауса и уравнения Рауса.

В V главе, используя уравнение Лагранжа и понятие обобщённого импульса, решается поставленная Гамильтоном задача о нахождении уравнений движения системы материальных точек. В качестве основной функции выбирается полная энергия, выраженная через переменные двух видов: геометрические, определяющие положение системы материальных точек, и динамические, определяющие основную величину ньютоновской механики – импульс. Результатом решения поставленной задачи является получение уравнений движения в форме Гамильтона (система канонических уравнений Гамильтона), имеющие исключительно важное значение в изучении теоретической физики, особенно статистической физики и квантовой механики.

В VI главе с помощью первых трёх форм основного уравнения выводится пятая форма, предназначенная для решения задач, связанных с неголономными системами материальных точек. На основании пятой формы основного уравнения, функции Гиббса и принципа наименьшего принуждения Гаусса, выводится уравнение Гиббса-Аппеля, приводится алгоритм составления уравнений Гиббса-Аппеля.

В VII главе на основании четвёртой формы основного уравнения выводится последняя шестая форма основного уравнения, предназначенная для решения задач, связанных с консервативными голономными системами материальных точек. Приводятся доказательства эквивалентности шестой формы основного уравнения уравнениям Лагранжа, Гамильтона и Рауса, выводится принцип Гамильтона, вводится понятие главной функции и рассматриваются её свойства.

В главе VIII рассматривается дифференциальное уравнение Гамильтона и приводится доказательство теоремы Гамильтона-Якоби.

Теоретическая часть учебного пособия заканчивается IX главой, посвящённой уравнениям Гамильтона. В этой главе вводятся скобки Пуассона, приводятся доказательства: теоремы Пуанкаре о линейном интегральном инварианте, теоремы Лиувилля,

Три последние главы (X, XI, XII) посвящены вопросам, имеющим важное значение для последующих разделов теоретической физики: задаче двух тел, теории малых колебаний и теории удара.

В приложении приведены математические сведения, касающиеся, в основном, вопросов вариационного исчисления.

Все теоретические вопросы иллюстрируются решениями конкретных задач.

Выражаю искреннюю признательность моему учителю доктору физико-математических наук, профессору кафедры физики ПГПИ, Почётному Соросовскому Профессору **Герману Ароновичу Розману** как за саму идею написания учебного пособия, так и за то внимание, терпение и требовательность проявленные им при обсуждении различных вариантов рукописи.

Автор также выражает благодарность проректору по учебной работе Псковского политехнического института Санкт-Петербургского технического университета, профессору **Анатолию Николаевичу Верховину**, заведующей кафедрой математического анализа, кандидату педагогических наук, доценту кафедры математического анализа ПГПИ **Сазановой Лидии Ивановне**, доктору физико-математических наук, профессору кафедры физики ПГПИ **Фесенко Борису Ивановичу** и заведующему кафедрой физики кандидату физико-математических наук, доценту кафедры физики ПГПИ **Соловьёву Владимиру Гаевичу** добрые советы, критические замечания и поддержка которых оказали большую помощь при работе над рукописью.

Псков, 1999 г.

Автор.

