Глава II
Первые три формы основного уравнения

В данной главе приводится уравнение, полученное Лагранжем в 1760 году, на котором основывается изложение всей аналитической динамики. Это уравнение в дальнейшем мы будем *называть основным уравнением*. Основное уравнение может быть представлено в различных формах, соответствующих определённому кругу решаемых задач, а иногда и целому разделу механики. В рамках данной главы мы рассмотрим первые три формы основного уравнения.

§2.1. Первая форма основного уравнения

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек, подчинённую k голономным связям. Координаты материальных точек относительно неподвижной декартовой системы координат будем обозначать через $x_1, x_2, ..., x_N$, где $N = 3n$, так что материальная точка под номером r будет иметь координаты $x_{3r-2}, x_{3r-1}, x_{3r}$, что соответствует следующей таблице (в верхней строке которой координаты материальных точек выражены через x_r, y_r, z_r, а в нижней строке те же самые координаты выписаны подряд под номерами $x_{3r-2}, x_{3r-1}, x_{3r}$):

$$\begin{array}{l} x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ..., x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n} \end{array}.$$

Когда мы будем говорить о n материальных точках, координаты материальной точки, имеющей массу m, обозначим через x, y, z, а суммирование по n материальным точкам – через $\sum$. Таким образом, выражения

$$\sum_{r=1}^{N} m_r \ddot{x}_r \delta x_r \ , \tag{2.1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i \right) \tag{2.1.2}$$

и

$$\sum m \left(\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z \right) \tag{2.1.3}$$

обозначают одно и то же.

То же самое относится и к заданным силам $X_1, X_2, ..., X_N$. Составляющие заданной силы, действующей на материальную току под номером r, будут: $X_{3r-2}, X_{3r-1}, X_{3r}$.

Итак, с учётом сделанных выше замечаний, для системы из n материальных точек можно написать

$$m_r \ddot{x}_r = X_r + X'_r, \qquad (r = 1, 2, ..., N). \tag{2.1.4}$$

Здесь X_r - заданные силы, а X'_r - реакции связи, удовлетворяющие условию

$$\sum_{r=1}^{N} X'_r \delta x_r = 0 \tag{1.5.3}$$

для любого виртуального перемещения $\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_N$. (Это условие было нами рассмотрено в задаче 9).

Перепишем уравнение (2.1.4) следующим образом

$$m_r \ddot{x}_r - X_r = X'_r.$$

Умножим левую и правую часть полученного уравнения на δx_r и просуммируем по r от 1 до N, получим, с учётом (1.5.3), *основное уравнение* механической системы материальных точек

$$\boxed{\sum_{r=1}^{N}(m_r\ddot{x}_r - X_r)\delta x_r = 0\,.} \qquad (2.1.6)$$

Физический смысл полученного уравнения заключается в следующем: *в каждый момент времени движения системы материальных точек, подчинённой идеальным связям, виртуальная работа всех сил инерции и заданных сил на виртуальных перемещениях системы материальных точек равна нулю.*

Уравнение (2.1.6) справедливо для любого виртуального перемещения. Отметим и тот факт, что полученное уравнение не содержит реакций связи. Это уравнение является основным уравнением аналитической динамики. Мы будем называть его *первой формой основного уравнения*. Иногда уравнение (2.1.6) называют уравнением *Даламбера - Лагранжа*.

Уравнение (2.1.6), записанное для n материальных, точек выглядит так:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(m_i\ddot{x}_i - X_i)\delta x_i + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)\delta y_i + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)\delta z_i\right] = 0\,. \qquad (2.1.7)$$

Рассмотрим несколько приложений полученного уравнения.

§2.2. Сохранение импульса

Предположим, что система материальных точек движется как твёрдое тело вдоль оси x без вращения. Тогда для виртуальных перемещений каждой частицы материальной системы можно написать

$$\delta x = a\,,\ \ \delta y = 0\,,\ \ \delta z = 0\,, \qquad (2.2.1)$$

где a - некоторое произвольное число. Уравнение (2.1.6) теперь можно переписать так:

$$\sum(m\ddot{x} - X)a = 0 \ \text{или} \ \sum m\ddot{x} = \sum X\,. \qquad (2.2.2)$$

Здесь суммирование проводится по n материальным точкам. Уравнение (2.2.2) можно упростить, если учесть, что все внутренние силы попарно равны и противоположны (III закон Ньютона), предположим так же, что сумма всех внешних сил равна нулю, тогда

$$\sum m\ddot{x} = 0 . \qquad (2.2.3)$$

После интегрирования (2.2.3) получим

$$\sum m\dot{x} = const . \qquad (2.2.4)$$

Уравнение (2.2.4) выражает *теорему о сохранении импульса.*

Для системы материальных точек справедливо следующее уравнение

$$\sum mx = \left(\sum m\right) \cdot \xi . \qquad (2.2.5)$$

В уравнении (2.2.5) под переменной ξ мы подразумеваем совокупность координат ξ, η, ζ как центра масс G принятой нами системы материальных точек. Учитывая, что в (2.2.5) $\left(\sum m\right)$ есть постоянное число, мы можем, принимая во внимание (2.2.3) и (2.2.4), написать

$$\dot{\xi} = const . \qquad (2.2.6)$$

Уравнение (2.2.6) означает, что *если все заданные силы являются внутренними, центр масс системы материальных точек G движется равномерно и прямолинейно* и с ним можно связать ИСО, совместив начало координат непосредственно с центром масс, который в данном случае будет находиться в покое.

§2.3. Сохранение момента количества движения

Предположим теперь, что система материальных точек вращается, как твёрдое тело вокруг оси z . Тогда класс виртуальных перемещения будет включать в себя бесконечно малый поворот всей системы материальных точек вокруг оси Oz и уравнение (2.2.1) будет выглядеть следующим образом

$$\delta x = -y\delta\theta , \quad \delta y = x\delta\theta , \quad \delta z = 0 . \qquad (2.3.1)$$

Эти уравнения получаются из равенств $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, варьируя которые по θ получим

$$\delta x = -r\sin\theta\delta\theta = -y\delta\theta ,\ \delta y = r\cos\theta\delta\theta = x\delta\theta .$$

Воспользуемся уравнением (2.1.7)

$$\sum\left[(m\ddot{x}-X)\delta x+(m\ddot{y}+Y)\delta y+(m\ddot{z}-Z)\delta z\right]=$$
$$=\sum\left[(m\ddot{x}-X)\cdot(-y\delta\theta)+(m\ddot{y}-Y)\cdot x\delta\theta+(m\ddot{z}-Z)\cdot 0\right]=$$
$$=\sum m(x\ddot{y}-y\ddot{x})\delta\theta-(xY-yX)\delta\theta=0\,.$$

Откуда

$$\sum m(x\ddot{y}-y\ddot{x})=\sum(xY-yX). \qquad (2.3.2)$$

Опуская, как и в предыдущем параграфе, внутренние силы и предполагая, что сумма моментов всех внешних сил относительно оси z равна нулю, мы можем написать

$$\sum m(x\ddot{y}-y\ddot{x})=0\,. \qquad (2.3.3)$$

После интегрирования (2.3.3), получим

$$\sum m(x\dot{y}-y\dot{x})=0\,. \qquad (2.3.4)$$

В левой части уравнения (2.3.3) стоит хорошо известное из теоретической механики выражение для проекции на ось Oz момента количества движения (кинетического момента) $L_z=\sum m(x\dot{y}-y\dot{x})$ системы материальных точек.

Уравнение (2.3.4) выражает теорему о *сохранении момента количества движения*.

Исходя из первой формы основного уравнения, нам с помощью элементарных рассуждений удалось получить две очень важные теоремы – теорему о сохранении импульса и теорему о сохранении момента количества движения. В дальнейшем мы ещё раз получим эти теоремы, исходя из других предпосылок.

§2.4. Первая форма уравнения энергии

В ходе решения задачи 9 мы ввели понятие катастатической системы материальных точек, для которой характерно совпадение классов виртуальных перемещений и скоростей с соответствующими классами действительных перемещений и скоростей. В первой форме основного уравнения механики

$$\sum_{r=1}^{N}\left(m_r\ddot{x}_r - X_r\right)\delta x_r = 0\,, \tag{2.1.6}$$

в соответствии с вышеизложенным, вместо δx_r мы можем написать $\dot{x}_r$, в результате чего получим следующее уравнение

$$\sum_{r=1}^{N}\left(m_r\ddot{x}_r - X_r\right)\cdot \dot{x}_r = \sum_{r=1}^{N}\left(m_r\ddot{x}_r\dot{x}_r - X_r\dot{x}_r\right) = 0\,,$$

или

$$\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r\ddot{x}_r = \sum_{r=1}^{N} X_r\dot{x}_r\,. \tag{2.4.1}$$

Рассмотрим подробнее произведение $m_r\dot{x}_r\ddot{x}_r$, стоящее в левой части уравнения (2.4.1). Возьмём выражение для кинетической энергии материальной точки $\frac{1}{2}m_r\dot{x}_r^2$ и продифференцируем его по времени t.

Получим $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_r\dot{x}_r^2\right) = m_r\dot{x}_r\ddot{x}_r$. Теперь уравнение (2.4.1) можно записать так

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \sum_{r=1}^{N} X_r\dot{x}_r\,,} \tag{2.4.2}$$

где

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r\dot{x}_r^2 \tag{2.4.3}$$

- *кинетическая энергия* системы материальных точек.

Запишем (2.4.3) в эквивалентных формах:

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right), \tag{2.4.4}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m\dot{x}^2 . \qquad (2.4.5)$$

Уравнение (2.4.2) *представляет собой первую (простейшую) форму уравнения энергии.* Оно говорит о том, что *скорость изменения кинетической энергии системы материальных точек равна скорости, с которой совершается работа заданных сил.*

§2.5. Вторая форма уравнения энергии

Рассмотрим вновь систему материальных точек и пусть теперь под набором $x_1, x_2, ..., x_N$ понимаются не только текущие координаты материальных точек в момент времени t, а всё поле координат. Пусть заданные силы $X_1, X_2, ..., X_N$ зависят лишь от x и не зависят от $\dot{x}$ и от времени t. Во многих случаях форма Пфаффа $\sum\limits_{r=1}^{N} X_r \dot{x}_r$, стоящая в правой части уравнения (2.4.1) является полным дифференциалом некоторой однородной однозначной функции $-V$ аргументов $x_1, x_2, ..., x_N$:

$$\sum_{r=1}^{N} X_r \dot{x}_r = -dV . \qquad (2.5.1)$$

При этом считают, что заданные силы *консервативны* (система материальных точек консервативна), функцию V называют *потенциальной энергией* заданных сил (или потенциальной энергией системы материальных точек). Знак « - » в уравнении (2.5.1) говорит о том, за нулевой уровень принимается потенциальная энергия материальных точек удалённых на бесконечно большое расстояние друг от друга.

Если система материальных точек консервативна, то уравнение

$$\sum_{r=1}^{N} \left(m_r \ddot{x}_r - X_r\right)\delta x_r = 0 \qquad (2.1.6)$$

с учётом (2.5.1) можно переписать так

$$\sum_{r=1}^{N}(m_r\ddot{x}_r - X_r)\delta x_r = \sum_{r=1}^{N} m_r\ddot{x}_r\delta x_r + \delta V = 0 . \qquad (2.5.2)$$

Рассмотрим вновь катастатическую систему материальных точек, пусть заданные силы будут консервативными, а потенциальная энергия пусть будет равна V . Подставим в выражение для функции V значения координат $x_1, x_2, ..., x_N$, принимаемые в момент времени t при некотором действительном движении системы материальных точек. Теперь V есть не просто значение потенциальной энергии, а её значение в данный момент времени t . Тогда

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{r=1}^{N}\frac{\partial V}{\partial x_r}\dot{x}_r = -\sum_{r=1}^{N} X_r\dot{x}_r . \qquad (2.5.3)$$

Учитывая, что

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{r=1}^{N} X_r\dot{x}_r , \qquad (2.4.2)$$

Можем сразу написать, что

$$\frac{dV}{dt} + \frac{dT}{dt} = 0 \qquad (2.5.4)$$

или

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0 . \qquad (2.5.5)$$

После интегрирования (2.5.5) получим

$$\boxed{T + V = h ,} \qquad (2.5.6)$$

где h - постоянная интегрирования (полная энергия системы), к которой мы будем прибегать при написании интегралов энергии.

Уравнение (2.5.6) *представляет собой вторую (классическую) форму уравнения энергии, или интеграл энергии.*

Если катастатическая система материальных точек находится под действием заданных консервативных сил, сумма кинетической и потенциальной энергий системы материальных точек сохраняет постоянное значение при любом движении системы.

Величина h в каждом движении определяется начальными условиями.

$V(x_1, x_2, ..., x_N) = h$ называют *поверхностью постоянной энергии* для данного движения. Учитывая, что $T \geq 0$, значение потенциальной энергии в течение всего времени движения будет $V \leq h$.

§2.6. Третья форма уравнения энергии

Рассмотрим ситуацию когда заданные силы в целом не консервативны, а систему материальных точек можно разбить на две подсистемы, одна из которых будет консервативной. Это можно выразить так

$$X_r = X_{r1} + X_{r2}, \tag{2.6.1}$$

где X_{r1} зависит от $x_1, x_2, ..., x_N$ и система сил X_{r1} консервативна.

Тогда

$$\sum_{r=1}^{N} X_{r1} dx_r = -dV. \tag{2.6.2}$$

Учитывая это, мы можем уравнение (2.4.2) записать так

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{r=1}^{N} \left(X_{r1}\dot{x}_r + X_{r2}\dot{x}_r \right) = -\frac{dV}{dT} + \sum_{r=1}^{N} X_{r2}\dot{x}_r. \tag{2.6.3}$$

Окончательно можно написать

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+V) = \sum_{r=1}^{N} X_{r2}\dot{x}_r.} \tag{2.6.4}$$

Уравнение (2.6.4) представляет собой *третью форму уравнения энергии*, включающую в себя первые две формы уравнений энергии как частные случаи.

Третья форма уравнения энергии выражает собой тот факт, что скорость изменения полной энергии (кинетической плюс потенциальной) равна мощности остальных сил, то есть сил, не дающих вклада в потенциальную энергию.

Уравнение (2.5.6), выражающее классический интеграл энергии, играет важную роль не только во всей механике, но распространяется буквально на все области физических наук.

§2.7. Вторая форма основного уравнения

Прежде чем вывести вторую форму основного уравнения, сделаем несколько предварительных замечаний.

Предположим, что мы рассматриваем систему материальных точек, подчинённую k связям. Тогда для виртуальных перемещений точек данной системы мы можем написать уже известное нам уравнение (1.4.16)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\,,\quad (j=1,2,\ldots,k). \qquad (1.4.16)$$

Здесь суммирование выполняется по n точкам. Преобразуем это уравнение следующим образом: перейдём от суммирования по n точкам к суммированию по $N=3n$ координатам (смотри §2.1.) и введём для краткости записи следующие обозначения $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}=A_{ji}$. Теперь уравнение (1.4.16) можно записать так

$$\sum_{r=1}^{N}A_{jr}\cdot\delta x_r=0\,, \qquad (2.7.1)$$

где $(j=1,2,\ldots,k)$.

Возьмём теперь уравнение (1.4.4), записанное для одной материальной точки, и составим уравнение для системы материальных точек, подчиняющейся k связям:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial f}{\partial t}=0\,, \qquad (1.4.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i+\frac{\partial f_j}{\partial t}\right)=0$$

или

$$\sum_{r=1}^{N}A_{jr}\dot{x}_r+A_j=0\,, \qquad (2.7.2)$$

где $A_j=\dfrac{\partial f_j}{\partial t}$. Очевидно, что коэффициенты A_{jr} и A_j - функции класса C_1, определённые в некоторой области значений $x_1,x_2,...,x_N;t$.
Теперь мы можем приступить к выводу второй формы основного уравнения.

При любом возможном движении системы удовлетворяются уравнения

$$\sum_{r=1}^{N}A_{jr}\dot{x}_r+A_j=0\,,\quad (j=1,2,...,k). \qquad (2.7.2)$$

Пусть $\dot{x}_1+\Delta\dot{x}_1,\dot{x}_2+\Delta\dot{x}_2,...,\dot{x}_N+\Delta\dot{x}_N$ будут какие-нибудь другие возможные скорости *в том же положении* системы материальных точек и *в тот же момент времени*. Для них так же можно написать

$$\sum_{r=1}^{N}A_{jr}\left(\dot{x}_r+\Delta\dot{x}_r\right)+A_j=0 \qquad (2.7.3)$$

или

$$\sum_{r=1}^{N}A_{jr}\dot{x}_r+\sum_{r=1}^{N}A_{jr}\Delta\dot{x}_r+A_j=0\,,$$

с учётом (2.7.2) сразу получим

$$\sum_{r=1}^{N}A_{jr}\Delta\dot{x}_r=0\,. \qquad (2.7.4)$$

Сравнивая уравнения (2.7.4) и (2.7.1), мы видим, что приращения скоростей $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_N$ удовлетворяют уравнениям (2.7.1) для виртуальных перемещений и мы можем в уравнении (2.1.6) вместо δx_r написать $\Delta\dot{x}_r$, в результате чего получим следующее уравнение

$$\boxed{\sum_{r=1}^{N}\left(m_r\ddot{x}_r - X_r\right)\Delta\dot{x}_r = 0}\ , \tag{2.7.5}$$

которое и представляет собой *вторую форму основного уравнения*. Во второй форме основного уравнения конфигурацию системы материальных точек и момент времени мы предполагаем заданными и рассматриваем два состояния системы в одной и той же конфигурации и в один и тот же момент времени, отличающиеся лишь скоростями, причём возможные значения скорости отличаются на конечную, а не бесконечно малую величину.

Если в уравнение (2.7.5) вместо $\Delta\dot{x}_r$ подставить $\dot{x}_r$, можно получить уравнение энергии для катастатической системы материальных точек. Предоставляем читателю проделать это самостоятельно.

В заключение заметим, что чаще всего вторая форма основного уравнения используется в теории удара.

§2.8. Третья форма основного уравнения

Вновь воспользуемся уравнениями (2.7.2)

$$\sum_{r=1}^{N} A_{jr}\dot{x}_r + A_j = 0\,, \quad \left(j = 1,2,\ldots,k\right). \tag{2.7.2}$$

Дифференцируем их по t, получим

$$\sum_{r=1}^{N}\left(A_{jr}\ddot{x}_r + \frac{dA_{jr}}{dt}\dot{x}_r\right) + \frac{dA_j}{dt} = 0\,, \quad \left(j = 1,2,\ldots,k\right). \tag{2.8.1}$$

Оператор $\dfrac{d}{dt}$ означает

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\dot{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,, \tag{2.8.2}$$

так как коэффициенты A_{jr} зависят от переменных $x_1, x_2, ..., x_N; t$.

Рассмотрим теперь два возможных движения системы материальных точек при одной и той же конфигурации в момент времени t и *одинаковых скоростях*, но различных ускорениях $\ddot{\vec{x}}$ и $\ddot{\vec{x}} + \Delta\ddot{\vec{x}}$, тогда (2.8.1) примет вид

$$\sum_{r=1}^{N}\left(A_{jr}\left(\ddot{x}_r + \Delta\ddot{x}_r\right) + \frac{dA_{jr}}{dt}\dot{x}_r\right) + \frac{dA_j}{dt} = 0. \qquad (2.8.3)$$

Сравнивая (2.8.3) и (2.8.1) можем написать

$$\sum_{r=1}^{N} A_{jr}\Delta\ddot{x}_r = 0, \quad \left(j = 1,2,...,k\right). \qquad (2.8.4)$$

Таким образом мы пришли к выводу, что конечные приращения ускорения $\Delta\ddot{x}_1, \Delta\ddot{x}_2, ..., \Delta\ddot{x}_N$ удовлетворяют уравнениям (2.7.1) для виртуальных перемещений и мы снова можем в основном уравнении (2.1.6) вместо δx_r написать $\Delta\ddot{x}_r$. В результате чего получим уравнение

$$\boxed{\sum_{r=1}^{N}\left(m_r\ddot{x}_r - X_r\right)\Delta\ddot{x}_r = 0,} \qquad (2.8.5)$$

которое носит название *третьей формы основного уравнения*.

В третьей форме основного уравнения конфигурации систем материальных точек, скорость и время считаются заданными и рассматриваются два состояния системы, отличающейся только ускорениями. Возможные приращения ускорений имеют конечную величину.

Итак, мы получили три формы основного уравнения. Отметим основные различия этих форм:

- в первой форме основного уравнения

$$\sum_{r=1}^{N}\left(m_r\ddot{x}_r - X_r\right)\delta x_r = 0. \qquad (2.1.6)$$

рассматривается бесконечно малое виртуальное перемещение из заданной конфигурации системы материальных точек;

- во второй форме основного уравнения

$$\sum_{r=1}^{N}(m_r\ddot{x}_r - X_r)\Delta\dot{x}_r = 0\ , \qquad (2.7.5)$$

координаты не варьируются, и рассматривается возможное приращение (не обязательно малое) скорости;
- в третьей форме основного уравнения

$$\sum_{r=1}^{N}(m_r\ddot{x}_r - X_r)\Delta\ddot{x}_r = 0, \qquad (2.8.5)$$

координаты и скорости не варьируются, и рассматривается возможное приращение (не обязательно малое) ускорения.

§2.9. Принцип Гаусса наименьшего принуждения

Докажем с помощью третьей формы основного уравнения теорему, доказанную Гауссом в 1829 году.

Предположим, что нам задана конфигурация и скорости некоторой системы материальных точек в момент времени t. Сконструируем некоторую квадратичную форму

$$C = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r\left(\ddot{x}_r - \frac{X_r}{m_r}\right)^2\ , \qquad (2.9.1)$$

зависящую от $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, ..., \ddot{x}_N$ и будем рассматривать те значения $\ddot{\vec{x}}$, которые возможны при заданных конфигурации и скоростях системы материальных точек.

Принцип Гаусса утверждает, что *в данном классе значений* $\ddot{\vec{x}}$ *выражение* C *для истинного ускорения минимально*.

Иными словами, для истинного ускорения выражение C принимает меньшее значение, чем для любого другого возможного ускорения.

С точки зрения математики доказательство данной теоремы сводится к минимизации квадратичной формы (2.9.1).

Мы докажем эту теорему с помощью третьей формы основного уравнения. Пусть $\ddot{\vec{x}}$ - истинное ускорение, а $\ddot{\vec{x}} + \Delta\ddot{\vec{x}}$ - любое другое возможное ускорение. Составим выражение для ΔC

$$\Delta C = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \left\{\left(\ddot{x}_r + \Delta\ddot{x}_r - \frac{X_r}{m_r}\right)^2 - \left(\ddot{x}_r - \frac{X_r}{m_r}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \left(\Delta\ddot{x}_r\right)^2 + \sum_{r=1}^{N}\left(m_r\ddot{x}_r - X_r\right)\cdot\Delta\ddot{x}_r \,. \qquad (2.9.2)$$

Учитывая, что последняя сумма в (2.9.2) есть третья форма основного уравнения (2.8.5), равная нулю, получим окончательно

$$\Delta C = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} m_r \left(\Delta\ddot{x}_r\right)^2 \,. \qquad (2.9.3)$$

Таким образом, для $\Delta\ddot{\vec{x}} \neq 0$ выполняется условие $\Delta C > 0$, то есть квадратичная форма (2.9.1) минимальна лишь для истинного ускорения.

Применим полученные в данной главе результаты в решении следующих задач.

Задача 16.

Машина Атвуда. Две материальные точки, имеющие массы m_1 и m_2 соединены между собой лёгкой нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок, и движутся в вертикальной плоскости. Определить движение материальных точек.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$
Дано	m_1,
	m_2

Будем решать задачу в «лабораторной» системе отсчета, совместив начало системы координат с осью вращения блока. Примем для определённости $m_2 > m_1$. Сделаем чертёж.

Решение задачи с помощью первой формы основного уравнения.

Составим уравнение связи. Для этого примем длину нити равной l, а радиус блока - R. Тогда уравнение связи примет вид

$$x_1 + x_2 + \pi R = l,$$

откуда немедленно следует что $\delta x_1 + \delta x_2 = 0$ и $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$. Или

$$\delta x_1 = -\delta x_2, \text{ и } \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2. \qquad (2.9.4)$$

Возьмём первую форму основного уравнения связи

$$\sum_{r=1}^{N} \left(m_r \ddot{x}_r - X_r\right)\delta x_r = 0 \qquad (2.1.6)$$

и подстав в неё известные нам величины, получим

$$\left(m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g\right)\delta x_1 + \left(m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g\right)\delta x_2 = 0$$

или с учётом (2.9.4)

$$\left(-m_1 \ddot{x}_2 - m_1 g\right)\left(-\delta x_2\right) + \left(m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g\right)\delta x_2 = 0,$$

или $\left(m_2 + m_1\right)\ddot{x}_2 - \left(m_2 - m_1\right)g = 0$,

откуда $\ddot{x}_2 = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$.

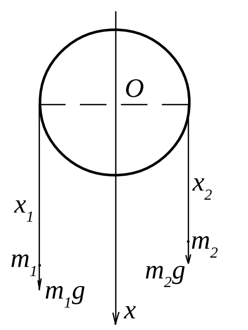

Рис.10.

Таким образом, мы пришли к выводу, что материальные точки движутся в противоположных направлениях с одинаковым по величине постоянным ускорением.

Решение задачи с помощью принципа Гаусса наименьшего принуждения.

Так как по условию задачи нить перекинута через блок и нерастяжима, то естественно предположить, что материальные точки будут двигаться с одинаковым ускорением в разные стороны. Обозначим это ускорение через w и учтём, что материальная точка массы m_2 движется вниз, а материальная точка массы m_1 вверх. Составим уравнение (2.9.1)

$$C = \frac{1}{2}\left\{m_1(-w-g)^2 + m_2(w-g)^2\right\}.$$

После возведения соответствующих выражений в квадрат и приведения подобных членов, получим

$$C = \frac{1}{2}\left\{(m_2+m_1)w^2 - 2(m_2-m_1)gw + (m_2+m_1)g^2\right\}.$$

Из уравнения $\partial C/\partial w = 0$ находим

$$\frac{\partial C}{\partial w} = (m_2+m_1)w - (m_2-m_1)g = 0,$$

откуда $w = \dfrac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g$, что совпадет с результатом решения задачи первым способом.

Решим ещё две задачи на применение принципа Гаусса.

Задача 17.

Обезьяна и противовес. Заменим в предыдущей задаче материальную точку массы m_1 на обезьяну той же массы, которая лезет вверх по нити. Будем считать обезьяну материальной точкой. Положение обезьяны относительно нити в момент времени t зададим функцией $\varphi(t)$ класса C_2. В начальный момент времени вся система находилась в покое, то есть $\varphi(0)=\dot\varphi(0)=0$. Определить закон движения обезьяны.

Найти	$\ddot{x}_1$
Дано	m_1,
	m_2,
	$\varphi(0)=\dot\varphi(0)=0$.

Запишем условие задачи кратко.

Решение задачи.

Решим задачу в «лабораторной» ИСО. Ось Ox проходит через ось вращения блока и направлена вертикально вверх. Обезьяна и противовес (материальная точка массы m_2) в начальный момент времени t находятся на одном уровне, который мы примем за нулевой. При перемещении обезьяны по нити её длина будет сокращаться (обезьяна выбирает её на себя) и если обозначить координаты обезьяны и противовеса через x_1 и x_2 соответственно, то уравнение (2.9.1) будет выглядеть так

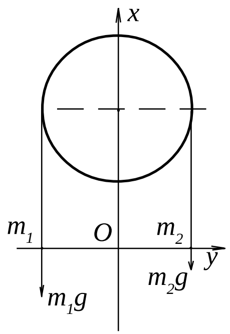

Рис.11.

$$C = \frac{1}{2}\left\{m_1\left(\ddot{x}_1 + g\right)^2 + m_2\left(\ddot{x}_2 + g\right)^2\right\}. \qquad (2.9.5)$$

Так как в начальный момент времени $t = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, мы можем написать, что $\varphi(t) = \varphi = x_1 + x_2$, откуда $\ddot{x}_2 = \ddot{\varphi} - \ddot{x}_1$. Подставляя это в (2.9.5) получим

$$C = \frac{1}{2}\left\{m_1\left(\ddot{x}_1 + g\right)^2 + m_2\left(\ddot{\varphi} - \ddot{x}_1 + g\right)^2\right\}. \qquad (2.9.6)$$

Требуется определить значение $\ddot{x}_1$, минимизирующее квадратичную форму (2.9.6). Составим уравнение $\partial C / \partial \ddot{x}_1 = 0$.

$$\frac{\partial C}{\partial \ddot{x}_1} = \frac{1}{2}\left\{2m_1\left(\ddot{x}_1 + g\right) - 2m_2\left(\ddot{\varphi} - \ddot{x}_1 + g\right)\right\} = 0.$$

Или

$$m_1\left(\ddot{x}_1 + g\right) - m_2\left(\ddot{\varphi} - \ddot{x}_1 + g\right) = 0.$$

Окончательно

$$\left(m_2 + m_1\right)\ddot{x}_1 = m_2\ddot{\varphi} + \left(m_2 - m_1\right)g. \qquad (2.9.7)$$

Дважды проинтегрировав (2.9.7) с учётом нулевых начальных условий, получим

$$\left(m_2 + m_1\right)x_1 = m_2\varphi + \frac{1}{2}\left(m_2 - m_1\right)gt^2. \qquad (2.9.8)$$

В частном случае, когда обезьяна и противовес имеют одинаковую массу, получим $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\varphi$, то есть обезьяна и противовес будут находиться на одинаковой высоте.

Задача 18.

Две материальные точки, имеющие массы m_1 и m_2 соединены между собой лёгкой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок массы m и радиуса R, и движутся в вертикальной плоскости. Определить движение материальных точек.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$
Дано	m_1, m_2, m, R.

Решение задачи.

Будем решать задачу в «лабораторной» системе отсчета, совместив начало системы координат с осью вращения блока. Примем для определённости $m_2 > m_1$ и воспользуемся рис. 10. Мы снова возвращаемся к задаче 16, но теперь блок имеет отличную от нуля массу, что естественно скажется на виде первой формы основного уравнения.

Составим уравнение связи по аналогии с задачей 16.

$$x_1 + x_2 + \pi R = l,$$

откуда немедленно следует что

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0.$$

Или

$$\delta x_1 = -\delta x_2 \quad \text{и} \quad \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2. \qquad (2.9.4)$$

Составим первую форму основного уравнения связи

$$(m_1\ddot{x}_1 - m_1 g)\delta x_1 + (m_2\ddot{x}_2 - m_2 g)\delta x_2 + I_o\varepsilon_z\delta\varphi = 0, \qquad (2.9.9)$$

где $I_o = \dfrac{mR^2}{2}$ - момент инерции блока,

$\varepsilon_z = \dfrac{\ddot{x}_1}{R}$ - угловое ускорение,

$\delta\varphi = \dfrac{\delta x_1}{R}$ - вариация угла поворота φ.

Подставим полученные выше значения в (2.9.9) и с учётом (2.9.4) получим

$$(m_1\ddot{x}_1 - m_1 g)\delta x_1 + (-m_2\ddot{x}_1 - m_2 g)\cdot(-\delta x_1) + \frac{m}{2}\ddot{x}_1\delta x_1 = 0,$$

после приведения подобных членов

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right)\ddot{x}_1 + (m_2 - m_1)g = 0$$

или окончательно

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} g. \qquad (2.9.10)$$

Задача 19.

Материальная точка на движущейся наклонной плоскости. Клин массы M скользит по горизонтальной поверхности. Материальная точка массы m движется по наклонной плоскости клина, образующей с горизонтальной плоскостью угол α. Все поверхности гладкие. Найти закон движения материальной точки.

Найти	w'
Дано	M, m, α.

Запишем условие задачи кратко.

Решение задачи.

Выберем «лабораторную» ИСО. Предположим, что в один и тот же момент времени t клин

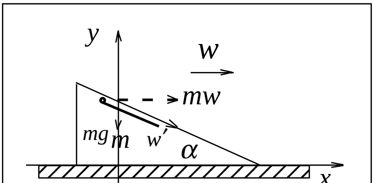

Рис.12.

имеет ускорение w, а материальная точка имеет по отношению к клину ускорение w'. Сделаем чертёж.

Составим уравнение (2.9.1). Здесь следует учесть, что по оси x на материальную точку со стороны клина действует сила mw, а по оси y действует сила тяжести mg.

$$C = \frac{1}{2}Mw^2 + \frac{1}{2}m\left\{\left(w'\cos\alpha - \frac{mw}{m}\right)^2 + \left(w'\sin\alpha - \frac{mg}{m}\right)^2\right\},$$

или

$$C = \frac{1}{2}Mw^2 + \frac{1}{2}m\left\{(w'\cos\alpha - w)^2 + (w'\sin\alpha - g)^2\right\}.$$

После элементарных преобразований получим

$$C = \frac{1}{2}(M+m)w^2 + \frac{1}{2}mw'^2 - mww'\cos\alpha - mgw'\sin\alpha + \frac{1}{2}mg^2.$$

Составим уравнения $\dfrac{\partial C}{\partial w} = 0$ $\quad \dfrac{\partial C}{\partial w'} = 0$.

$$\frac{\partial C}{\partial w} = (M+m)w - mw'\cos\alpha = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{w}{m\cos\alpha} = \frac{w'}{M+m}. \tag{2.9.11}$$

$$\frac{\partial C}{\partial w'} = mw' - mw\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$w' = w\cos\alpha + g\sin\alpha.$$

С учётом (2.9.11) можно написать

$$w' = \frac{m\cos^2\alpha}{M+m}w' + g\sin\alpha$$

или

$$\left(1 - \frac{m\cos^2\alpha}{M+m}\right)w' = g\sin\alpha\,.$$

После простейших преобразований получим

$$w' = \frac{(M+m)\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g\,.$$

Материальная частица движется по наклонной плоскости с постоянным ускорением.