Глава III
Уравнения Лагранжа

В этой главе мы вновь возвращаемся к понятиям обобщённых координат и обобщённых сил (см. §§ 1.6. и 1.7.), с помощью которых составляется четвёртая форма основного уравнения. Рассмотрим также уравнение Лагранжа и функцию Лагранжа, интеграл Якоби, обобщённый потенциал.

§3.1. Четвёртая форма основного уравнения

Четвёртую форму основного уравнения движения системы материальных точек в обобщённых координатах, мы получим из основного уравнения

$$\sum_{r=1}^{N}\left(m\ddot{x}_r - X_r\right)\delta x_r = 0\,. \tag{2.1.6}$$

Приступая к выводу, следует выбрать обобщённые координаты. Они должны однозначно определять положение системы материальных точек и быть независимыми между собой. В остальном выбор обобщенных координат произволен. Здесь следует отметить, что при «удачном» выборе обобщённых координат, уравнения движения будут иметь наиболее компактный вид. Решения задач №№10-14 и есть примеры таких «удачных» выборов обобщённых координат.

Выбрав обобщённые координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ выразим декартовы координаты системы материальных точек через эти обобщённые координаты

$$x_r = x_r\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, t\right), \quad r = 1,2,\ldots,N\,, \tag{3.1.1}$$

где $x_r = x_r\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, t\right)$ принадлежат классу C_2 в соответствующей области D изменения $q_1, q_2, .., q_n, t$.

Составим выражения для $\dfrac{dx_r}{dt}$,

$$\frac{dx_r}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial x_r}{\partial t}, \; r = 1,2,...,N,$$

здесь учтено, что $\dfrac{\partial x_r}{\partial t} \dfrac{\partial t}{\partial t} = \dfrac{\partial x_r}{\partial t}$.

Или

$$\dot{x}_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_r}{\partial t}, \;\; r = 1,2,...,N, \tag{3.1.2}$$

откуда видно, что производные $\dot{x}_r$ связаны с $\dot{q}$ линейными соотношениями, коэффициенты в которых зависят от $q_1, q_2, .., q_n, t$.

Рассмотрим две леммы.

Лемма 1.

$$\frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_r}{\partial q_i}. \tag{3.1.3}$$

Доказательство (3.1.3) очевидно.

$$\frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dfrac{\partial x_r}{\partial t}}{\dfrac{\partial q_i}{\partial t}} = \frac{\partial x_r}{\partial q_i}.$$

Лемма 2.

$$\frac{\partial \dot{x}_r}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_r}{\partial q_i}\right). \tag{3.1.4}$$

Для доказательства (3.1.4) распишем с учётом (3.1.2) левую часть равенства подробно, понимая под индексами r и i конкретные фиксированные значения, а индекс $j = 1,2,,...,N$.

$$\frac{\partial \dot{x}_r}{\partial q_i} = \sum_j^n \frac{\partial^2 x_r}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_r}{\partial q_i \partial t} =$$

$$= \sum_j^n \frac{\partial^2 x_r}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_r}{\partial t \partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_r}{\partial q_i}\right),$$

так как $x_r = x_r(q_1, q_2,..., q_n, t) \in C_2$ в области D, и мы можем поменять порядок дифференцирования.

Возьмём теперь уравнение (2.4.3) для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^n m_r \dot{x}_r^2 \qquad (2.4.3)$$

и подставим вместо $\dot{x}_r$ её значение из (3.1.2):

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^n m_r \dot{x}_r^2 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^n m_r \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_r}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_r}{\partial t}\right)^2 . \qquad (3.1.5)$$

Правая часть последнего равенства есть не что иное, как полином $\tilde{T}$ второй степени относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2,..., \dot{q}_n$ с коэффициентами, зависящими от $q_1, q_2,.., q_n, t$. Обозначение $\tilde{T}$ выбрано лишь только для того, чтобы отличать значения для T из формулы (2.4.3) от значений $\tilde{T}$ из формулы (3.1.5). Представим полином $\tilde{T}$ так:

$$\tilde{T} = T_2 + T_1 + T_0, \qquad (3.1.6)$$

где T_2 обозначает однородную квадратичную функцию от $\dot{q}$:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^n m_r \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_r}{\partial q_i}\frac{\partial x_r}{\partial q_j}\dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ri}\dot{q}_r \dot{q}_i , \qquad (3.1.7)$$

где

$$a_{ri}=\sum_{j=1}^{n}m_j\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial q_i}+\frac{\partial y_j}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial q_i}+\frac{\partial z_j}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial z_j}{\partial q_i}\right),\qquad (3.1.7)^*$$

$$j=1,2,...,n\,.$$

Таким образом с помощью равенства (3.1.7)* мы убираем суммирование по j из равенства (3.1.7).

T_1 - однородная линейная функция от $\dot{q}$:

$$T_1=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}m_r\cdot 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_r}{\partial q_i}\frac{\partial x_r}{\partial t}\dot{q}_i=\sum_{r=1}^{n}a_r\dot{q}_r\,,\qquad (3.1.8)$$

где

$$a_r=\sum_{j=1}^{n}m_j\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t}+\frac{\partial y_j}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial t}+\frac{\partial z_j}{\partial q_r}\cdot\frac{\partial z_j}{\partial t}\right),\qquad (3.1.8)^*$$

$$j=1,2,...,n\,.$$

T_0 является функцией от $q_1,q_2,..,q_n,t$:

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}m_r\left(\frac{\partial x_r}{\partial t}\right)^2.\qquad (3.1.9)$$

Для стационарных связей, то есть связей, для которых $x_r=x_r(q_1,q_2,...,q_n)$ и, следовательно, $\frac{\partial x_r}{\partial t}\equiv 0$, кинетическая энергия будет однородной функцией второй степени относительно обобщённых скоростей, то есть

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ri}\dot{q}_r\dot{q}_i\,.\qquad (3.1.10)$$

Вернёмся снова к основному уравнению (2.1.6)

$$\sum_{r=1}^{N}(m\ddot{x}_r-X_r)\delta x_r=0\,.\qquad (2.1.6)$$

Подставим в (2.1.6) вместо δx_r его значение в соответствии с (1.6.14)

$$\delta x_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \delta q_i \ , \quad r = 1,2,\ldots,N \ , \qquad (1.6.14)$$

получим

$$\sum_{r=1}^{N} (m\ddot{x}_r - X_r) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{r=1}^{N} (m_r \ddot{x}_r - X_r) \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = 0 \ . \qquad (3.1.11)$$

С помощью лемм (3.1.3) и (3.1.4) преобразуем выражение $\ddot{x}_r \dfrac{\partial x_r}{\partial q_i}$.

$$\ddot{x}_r \frac{\partial x_r}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_r \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \right) - \dot{x}_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_r}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_r \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{x}_r \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial q_i} \ .$$

Учтём также, что в соответствии с (1.7.2)

$$\sum_{r=1}^{N} X_r \frac{\partial x_r}{\partial q_i} = Q_i \ , \qquad (3.1.12)$$

где Q_i - обобщённая сила.

Теперь коэффициент при δq_i в (3.1.11) можно представить так:

$$\sum_{r=1}^{N} m_r \left\{ \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_r \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{x}_r \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial q_i} \right\} - Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} - Q_i \ . \qquad (3.1.13)$$

Окончательно основное уравнение (2.1.6) можно записать в следующем виде:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} - Q_i \right\} \delta q_i = 0 \ .} \qquad (3.1.14)$$

Это и есть *четвёртая форма основного уравнения*.

§3.2. Уравнения Лагранжа

Уравнение (3.1.14) справедливо для любого виртуального перемещения $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n$. Предположим, что система материальных точек голономна и число обобщённых координат минимально, то есть $n = l$. Уравнение (3.1.14) будет справедливо при любых значениях $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n$, и мы можем написать:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_r} = Q_r ,} \qquad r = 1,2,...,n . \tag{3.2.1}$$

Эти уравнения называются *уравнениями движения Лагранжа*.

Предположим теперь, что система материальных точек неголономная и число обобщённых координат так же минимально, то есть $n = l + k$ (k число уравнений связей). Получим необходимые уравнения связей. Для этого воспользуемся уравнениями связей (2.7.2):

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ri} \dot{x}_i + A_r = 0 \text{ , } r = 1,2,...,k , \tag{3.2.2}$$

которые мы запишем следующим образом

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ri} dx_i + A_r dt = 0 . \tag{3.2.3}$$

Если теперь в уравнениях (3.2.3) вместо декартовых координат подставить обобщённые координаты, получим

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ri} dq_i + B_r dt = 0 , \qquad r = 1,2,...,k . \tag{3.2.4}$$

Нам нет необходимости на данном этапе подробно выписывать коэффициенты в уравнениях (3.2.4), так как нас сейчас интересует лишь общий принцип составления системы уравнений движения Лагранжа. В дальнейшем мы вернёмся к этому вопросу, решая конкретные задачи.

Уравнение (3.1.14) теперь справедливо не для произвольных δq , а для δq , удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ri}\delta q_i = 0\,, \qquad\qquad r = 1,2,...,k\,. \tag{3.2.5}$$

Уравнения движения (3.2.1) запишутся теперь в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_r} = Q_r + X'_r\,, \tag{3.2.6}$$

где X'_r - реакции связей.

Ранее мы установили, что реакции связей удовлетворяют условию

$$\sum_{r=1}^{n} X'_r \delta x_r = 0\,, \tag{1.5.3}$$

то есть реакции связей не совершают работы на любом виртуальном перемещении.

С другой стороны, виртуальные перемещения определяются как любые перемещения $\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_n$, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{r=1}^{n} A_{jr}\delta x_r = 0\,, \qquad\qquad (j = 1,2,...,k). \tag{2.7.2}$$

Уравнения (1.5.3) и (2.7.2) говорят о том, что реакции связей X'_r могут быть выражены с помощью k множителей λ_j

$$X'_r = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j A_{jr}\,, \quad (r = 1,2,...,n). \tag{3.2.7}$$

Переходя к обобщённым координатам на основании (3.2.5), представим (3.2.7) как

$$X'_r = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m B_{mr}\,, \quad (r = 1,2,...,n), \tag{3.2.8}$$

а уравнения (3.2.6) окончательно примут вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial q_r}=Q_r+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m B_{mr}\ , \qquad r=1,2,...,n\ , \qquad (3.2.9)$$

содержащий k множителей $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$. После присоединения к уравнениям (3.2.9) уравнений связей (3.2.4) записанных аналогично уравнению (2.7.2)

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ri}\dot{q}_i + B_r = 0\ ,\ r=1,2,...,k\ , \qquad (3.2.10)$$

мы получим систему $n+k$ уравнений для определения $n+k$ неизвестных q_r и λ_r как функций времени.

Уравнения (3.2.1) и (3.2.9) были получены Лагранжем в 1760 году. С помощью этих уравнений можно описать движение любой механической системы, для чего необходимо выполнить следующие операции:

1) *выбрать обобщённые координаты* q_r,

2) *составить функцию* $\widetilde{T}$ *- кинетической энергии в виде полинома от* $\dot{q}_r$ *(с коэффициентами зависящими от* q_r *и, возможно, от* t *),*

3) *написать выражение для работы, совершаемой заданными силами на произвольном виртуальном перемещении, в виде дифференциальной формы* (1.7.3).

$$\delta A=\sum_{r=1}^{n} Q_r\delta q_r\ . \qquad (1.7.3)$$

§3.3. Консервативные и обладающие потенциальной функцией системы материальных точек

Пусть заданные силы X_r зависят только от x_r и не зависят ни от $\dot{x}_r$, ни от t и для любого виртуального перемещения δx_r форма Пфаффа $\sum_{r=1}^{N} X_r \delta x_r$ является полным дифференциалом $-\delta V$, где V - однородная функция от переменных $x_1, x_2, ..., x_N$, принадлежащая классу C_1 (см. §2.5.). Будем определённые таким образом заданные силы *называть консервативными*, а функцию V - *потенциальной энергией*. Пусть так же соотношения между q_r и x_r не содержат время t.

Выразим форму Пфаффа $\sum_{r=1}^{N} X_r \delta x_r$ через обобщённые координаты

$$\sum_{r=1}^{N} X_r \delta x_r = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{N} X_r \frac{\partial x_r}{\partial q_i}\right)\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \tag{3.3.1}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = -\delta \tilde{V}, \tag{3.3.2}$$

где

$$V(x_1, x_2, ..., x_N) = \tilde{V}(q_1, q_2, ..., q_n). \tag{3.3.3}$$

Четвёртая форма основного уравнения (3.1.14) примет вид:

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_r} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_r}\right\}\delta q_r = 0. \tag{3.3.4}$$

Уравнения Лагранжа (3.2.1) и (3.2.6), соответственно для голономных и неголономных систем материальных точек, будут выглядеть так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_r}\right)-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_r}=-\frac{\partial\tilde{V}}{\partial q_r}, \qquad (3.3.5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_r}\right)-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_r}=-\frac{\partial\tilde{V}}{\partial q_r}+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m B_{mr}\ , \quad r=1,2,...,n\,. \qquad (3.3.6)$$

В некоторых случаях на систему материальных точек кроме консервативных сил могут действовать и другие силы $\overline{X}_r$. В качестве таких сил могут выступать, например, неконсервативные силы, зависящие от положения, или силы, зависящие от скоростей. Пусть

$$\overline{Q}_i=\sum_{r=1}^{N}\overline{X}_r\frac{\partial x_r}{\partial q_i}, \qquad (3.3.7)$$

так что работа добавочных сил на виртуальном перемещении равна $\sum_{i=1}^{n}\overline{Q}_i\delta q_i$, тогда уравнение (3.3.4) можно представить в виде

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_r}\right)-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_r}+\frac{\partial\tilde{V}}{\partial q_r}-\overline{Q}_r\right\}\delta q_r=0, \qquad (3.3.8)$$

содержащим в себе уравнения (3.2.1) и (3.3.4). (Черта над символами $\overline{X}$ и $\overline{Q}$ никакого отношения к средним значениям не имеет, просто таким значком мы отметили неконсервативные силы, зависящие от положения или скоростей).

Уравнения Лагранжа, соответственно, для голономных и неголономных систем материальных точек будут выглядеть так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_r}\right)-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_r}=-\frac{\partial\tilde{V}}{\partial q_r}+\overline{Q}_r, \qquad r=1,2,...,n, \qquad (3.3.9)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_r}\right)-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_r}=-\frac{\partial\tilde{V}}{\partial q_r}+\overline{Q}_r+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m B_{mr}\ , \quad r=1,2,...,n\,. \qquad (3.3.10)$$

Пусть теперь заданные силы X_r зависят от x_r и от t, а соотношения, связывающие q_r и x_r, содержат время t:

$$x_r = x_r(q_1, q_2, ..., q_n; t). \tag{3.3.11}$$

Может случиться, что для некоторого произвольного виртуального перемещения δx будет выполняться равенство:

$$\sum_{r=1}^{N} X_r \delta x_r = -\delta_i V, \tag{3.3.12}$$

где символ $\delta_i V$ выражает пространственный дифференциал

$$\delta_i V = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_r} \delta x_r \tag{3.3.13}$$

при фиксированном t. (Простым примером служит движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, напряженность которого изменяется со временем.) В данном случае мы не будем иметь классического интеграла энергии, но свойство, выражаемое соотношением (3.3.12), будет приводить к упрощению уравнений движения.

Пусть

$$V(x_1, x_2, ..., x_N; t) = \tilde{V}(q_1, q_2, ..., q_n; t), \tag{3.3.14}$$

тогда

$$\delta_i V = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_r} \delta x_r = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_i} \delta q_i \tag{3.3.15}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = -\delta_i \tilde{V}, \tag{3.3.16}$$

где $\delta_i \tilde{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_i} \delta q_i$ вычисляется при фиксированном t. Четвёртая форма основного уравнения (3.3.4) при выполнении (3.3.11) – (3.3.16) остаётся справедливой.

Нам часто будет встречаться система материальных точек, для которой будут выполняться следующие условия:

1) соотношения между q_r и x_r не содержат время t,

2) заданные силы консервативны,

3) система голономна и обобщённые координаты выбраны так, что $n = l$ (число обобщённых координат минимально).

В этом случае

$$\tilde{T} = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\dot{q}_r\dot{q}_i \,, \tag{3.3.17}$$

а коэффициенты a_{ri} зависят только от q_r. Последнее так же справедливо и для $\tilde{V}$, а уравнение (3.3.4) выполняется для произвольных значений $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n$. *Системы, удовлетворяющие перечисленным выше свойствам, будем называть натуральными системами материальных точек.*

§3.4. Функция Лагранжа

Будем в дальнейшем кинетическую и потенциальную энергии, выраженные через q_r и $\dot{q}_r$ (а также, возможно, и t), обозначать через T и V.

Четвёртая форма основного уравнения (3.3.4) запишется в виде

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r}\right\}\delta q_r = 0 \,. \tag{3.4.1}$$

Пусть

$$L = T - V \,, \tag{3.4.2}$$

тогда с учётом того, что T не зависит от q_r, а V не зависит от $\dot{q}_r$, уравнение (3.4.1) запишется так:

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r}\right\}\delta q_r = 0 \,. \tag{3.4.3}$$

Из уравнения (3.4.3) следует два важных вывода:

1. Если система материальных точек голономна и $n=l$ (число обобщённых координат минимально), то уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_r}\,, \qquad r=1,2,...,n\,. \tag{3.4.5}$$

2. Если система материальных точек неголономна и $n=l+k$, (k - число наложенных на систему связей), то уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_r}+\sum_{m=1}^{k}\lambda_m B_{mr}\,, \quad r=1,2,...,n\,. \tag{3.4.6}$$

К уравнениям (3.4.6) следует добавить k уравнений связи

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ri}\dot{q}_i+B_r=0\,, \quad r=1,2,...,k\,. \tag{3.2.7}$$

Функцию Лагранжа L называют кинетическим потенциалом системы материальных точек.

Отметим, что уравнение (3.4.5) инвариантно по отношению к любому преобразованию координаты q: другими словами, это значит, что, полагая $q=f(\varphi)$, мы снова получим уравнение типа (3.4.5), то есть

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0\,. \tag{3.4.7}$$

Эта инвариантность уравнений Лагранжа представляет большое преимущество, так как она даёт возможность для любых координат сразу написать уравнения движения системы материальных точек, то есть, кинетический потенциал полностью определяет все возможные движения системы материальных точек. Примером изложения механики с точки зрения кинетического потенциала может служить первый том широко известного курса по теоретической физике, написанного Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем - «Механика».

§3.5. Интеграл Якоби

Предположим, что система материальных точек, описываемая функцией Лагранжа L, удовлетворяет условиям:

1) L не содержит явно время t;

2) скорость $\dot{\vec{q}}$ в действительном движении является виртуальной скоростью.

В этом случае вместо δq_r в уравнении (3.4.3) можно написать $\dot{q}_r$.

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}\right\}\dot{q}_r = 0 . \qquad (3.5.1)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{r=1}^{n}\dot{q}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-L\right)=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\left\{\dot{q}_r\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r-\frac{\partial L}{\partial q_r}\dot{q}_r\right\}=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}\right\}\dot{q}_r .$$

Уравнение (3.5.1) мы можем теперь записать так

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{r=1}^{n}\dot{q}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-L\right\}=0 . \qquad (3.5.2)$$

После интегрирования (3.5.2), получим

$$\boxed{\sum_{r=1}^{n}\dot{q}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-L=h ,} \qquad (3.5.3)$$

где h - постоянная интегрирования.

Соотношение (3.5.3) называют *интегралом Якоби* или *интегралом энергии*. Так как в случае натуральной системы материальных точек, в соответствии с теоремой Эйлера об однородных функциях, можно написать

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = 2T , \qquad (3.5.4)$$

то с учётом $L = T - V$, (3.5.3) можно представить в виде

$$T + V = h . \qquad (3.5.5)$$

Если в уравнении (3.5.3) принять

$$L = T_2 + T_1 + T_0 - V , \qquad (3.5.6)$$

то согласно теореме Эйлера об однородных функциях получим

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = 2T_2 + T_1 . \qquad (3.5.7)$$

Теперь уравнение (3.5.3) можно записать в виде

$$T_2 + V - T_0 = h . \qquad (3.5.8)$$

Уравнение (3.5.8) представляет собой *явную форму интеграла Якоби* (3.5.3).

§3.6. Обобщённый потенциал

До сих пор мы рассматривали потенциальную энергию как функцию координат и времени, то есть

$$V = V(q_1, q_2, ..., q_n; t). \qquad (3.6.1)$$

Предположим теперь, что потенциальная энергия зависит не только от обобщённых координат и времени, но и от обобщённых скоростей

$$V = V(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n; t). \qquad (3.6.2)$$

Здесь мы, как и в §3.2. полагаем, что число обобщённых координат минимально, то есть $n = l$.

Потребуем, чтобы уравнения Лагранжа (3.2.1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r , \qquad r = 1,2,...,n \qquad (3.2.1)$$

имели вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0\,, \qquad r = 1,2,\ldots,n\,, \tag{3.6.3}$$

где

$$L = T - V\,. \tag{3.6.4}$$

Уравнения (3.6.3) будут выполняться, если предположить, что потенциальная энергия удовлетворяет уравнениям

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r\,,} \qquad r = 1,2,\ldots,n\,, \tag{3.6.5}$$

Функция (3.6.2), с помощью которой можно получить обобщённые силы по формуле (3.6.5), называется *обобщённым потенциалом*.

Рассмотрим, как зависит потенциальная энергия от обобщённых скоростей. На основании (3.6.5) мы можем написать, раскрыв полную производную по времени:

$$Q_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_r \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \frac{\partial V}{\partial q_r}\,, \tag{3.6.6}$$

$$r = 1,2,\ldots,n\,.$$

Так как обобщённые силы от обобщённых ускорений не зависят, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = 0\,, \qquad r = 1,2,\ldots,n\,, \tag{3.6.7}$$

то есть обобщённый потенциал V может быть только линейной функцией от обобщённых скоростей:

$$V = V(q_r, t) + \sum_{i=1}^{n} V_i(q_r, t)\dot{q}_i\,, \qquad r = 1,2,\ldots,n\,. \tag{3.6.8}$$

Определим вид обобщённых сил с помощью уравнений (3.6.5) и (3.6.8):

$$Q_r = \frac{dV_r}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_r}\left[\sum_{i=1}^{n} V_i \dot{q}_i + V\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_r}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial V_r}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial q_r} \dot{q}_i - \frac{\partial V}{\partial q_r} =$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial q_r} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V_r}{\partial q_i} - \frac{\partial V_i}{\partial q_r} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial V_r}{\partial t}, \qquad r = 1,2,...,n. \tag{3.6.9}$$

Введём обозначения

$$\gamma_{ri} = \frac{\partial V_r}{\partial q_i} - \frac{\partial V_i}{\partial q_r}, \qquad r, i = 1,2,...,n. \tag{3.6.10}$$

Очевидно, что

$$\gamma_{ri} = -\gamma_{ir}. \tag{3.6.11}$$

Уравнения (3.6.9) теперь запишутся так

$$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ri} \dot{q}_i + \frac{\partial V_r}{\partial t}, \qquad r = 1,2,...,n. \tag{3.6.12}$$

Если функция V_r не зависит от времени, то есть $\frac{\partial V_r}{\partial t} = 0$, уравнения (3.6.12) примут вид

$$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ri} \dot{q}_i, \qquad r = 1,2,...,n, \tag{3.6.13}$$

где $\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ri} \dot{q}_i$ - так называемые *гироскопические силы*.

На основании вышеизложенного можно сделать следующий вывод: *если функция потенциальной энергии V_r не зависит явно от времени, то обобщённые силы складываются из потенциальных сил* $\left(-\frac{\partial V}{\partial q_r} \right)$ *и гироскопических сил* $\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ri} \dot{q}_i \right)$.

Применим полученные в данной главе знания для решения задач, которые мы для удобства изложения поместим в следующий параграф.

§3.7. Приложения уравнений Лагранжа

Задача 20.

Простой маятник. Простой маятник мы рассматривали в задаче №10. Материальная точка М имеет массу m и может вместе с невесомым стержнем длины l качаться в вертикальной плоскости. Составить уравнение движения материальной точки М2.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$f(q,\dot{q},t)$
Дано	m,
	l

Решение задачи.

Свяжем ИСО с лабораторией, поместив начало системы координат в точку О. Сделаем чертёж.

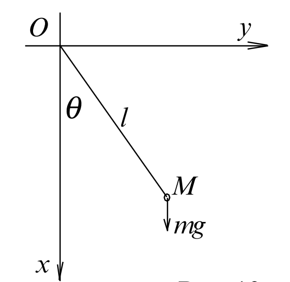

Рис. 13.

Данная система материальных точек имеет одну степень свободы.

Для решения задачи воспользуемся рекомендациями, приведёнными в §3.2.

1) Выберем обобщённые координаты, используя решение задачи 10.

Положение материальной точки М будет вполне определяться одной обобщённой координатой – углом θ, то есть $q=\theta$. Декартовы координаты материальной точки М можно записать так

$$x = l\cos\theta\,, \quad y = l\sin\theta\,. \tag{3.7.1}$$

2) Составим выражение для кинетической энергии материальной точки М. Так как маятник обладает моментом инерции I_O относительно точки подвеса, мы можем выразить кинетическую энергию материальной точки М через этот момент инерции, то есть

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2, \tag{3.7.2}$$

где

$$I_O = ml^2 \tag{3.7.3}$$

и окончательно

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 . \tag{3.7.4}$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}\text{ , а } \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 . \tag{3.7.5}$$

2) Составим выражение для обобщённой силы

$$Q = X \frac{\partial x}{\partial \theta} = -mgl \sin\theta . \tag{3.7.6}$$

Составим уравнение Лагранжа (3.2.1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = Q \text{ или } ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin\theta .$$

Окончательно получим

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \tag{3.7.7}$$

хорошо известное уравнение гармонических колебаний. Это уравнение является нелинейным, и его решение представляет большие трудности. Предположим, что координата θ точки M в процессе движения мало отклоняется от нуля. Тогда $\sin\theta \approx \theta$ и уравнение (3.7.7) можно заменить на «приближенное» линейное уравнение

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \tag{3.7.8}$$

где $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$.

Решая характеристическое уравнение

$$k^2+\omega^2=0, \tag{3.7.9}$$

получим:

$$k=\pm i\omega. \tag{3.7.10}$$

Общее решение уравнения (3.7.7) запишем в виде

$$\theta=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}. \tag{3.7.11}$$

Постоянные C_1 и C_2 можно определить, если будут заданы два начальных условия. Пусть в начале движения при $t=0$ координата материальной точки М равна θ_0, а её скорость $\dot{\theta}_0$. Подставим эти значения θ и $\dot{\theta}$ в уравнение (3.7.11) и в уравнение

$$\dot{\theta}=i\omega\left(C_1e^{i\omega t}-C_2e^{-i\omega t}\right), \tag{3.7.12}$$

полученное из (3.7.11) дифференцированием его по времени. После подстановки получим:

$$\theta_0=C_1+C_2, \tag{3.7.13}$$

$$\dot{\theta}_0=i\omega\left(C_1-C_2\right). \tag{3.7.14}$$

Складывая и вычитая уравнения (3.7.13) и (3.7.14), предварительно разделив (3.7.14) на $i\omega$, получим:

$$\left.\begin{aligned}\theta_0+\frac{\dot{\theta}_0}{i\omega}&=2C_1\\ \theta_0-\frac{\dot{\theta}_0}{i\omega}&=2C_2\end{aligned}\right\}. \tag{3.7.15}$$

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (3.7.11)

$$\theta=\frac{1}{2}\left(\theta_0+\frac{\dot{\theta}_0}{i\omega}\right)e^{i\omega t}+\frac{1}{2}\left(\theta_0-\frac{\dot{\theta}_0}{i\omega}\right)e^{-i\omega t}=$$

$$= \theta_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{\dot{\theta}_0}{i\omega} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} . \qquad (3.7.16)$$

Преобразуем (3.7.16) с помощью формул Эйлера

$$\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \sin \omega t , \qquad \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \cos \omega t . \qquad (3.7.17)$$

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sin \omega t . \qquad (3.7.18)$$

Предположим, что

$$\theta_0 = A \cos \delta \text{ и } \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} = A \sin \delta , \qquad (3.7.19)$$

где A и δ - некоторые постоянные. Теперь уравнение (3.7.18) можно представить в виде

$$\theta = A(\cos \delta \cos \omega t + \sin \delta \sin \omega t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

или окончательно

$$\theta = A \cos(\omega t - \delta). \qquad (3.7.20)$$

Это и есть уравнение колебания математического маятника.

Из формул (3.7.19) легко получить выражения для A и δ :

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2} \right)}, \quad tg\delta = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega \theta_0} . \qquad (3.7.21)$$

Если положить $\omega t - \delta = 0$, получим $\theta = A$. Наибольшее по абсолютной величине отклонение материальной точки от положения равновесия A назовём амплитудой колебаний.

При $t = 0$ $\theta = \theta_0 = A \cos(-\delta)$, где δ - начальный угол колебания или фаза колебания.

Если положить $\dot{\theta}_0 = 0$, то $\delta = 0$ и амплитуда A будет просто равна начальному отклонению материальной точки от положения равновесия. В этом случае уравнения колебаний будет содержать лишь одну постоянную, определяемую начальными условиями – амплитуду:

$$\theta = A\cos\omega t\,. \tag{3.7.22}$$

Задача 21.

Сферический маятник. Составить уравнения движения сферического маятника. Материальная точка массой m скользит под действием силы тяжести по гладкой (без трения) поверхности сферы радиуса l.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$f(q,\dot{q},t)$
Дано	m, l

Решение задачи.

Выберем ИСО «Лаборатория», поместим начало системы координат в центре сферы. При решении задачи воспользуемся рисунком 6 задачи 11 и результатами решения задач 11 и 15, то есть нам нет необходимости подробно обсуждать получение обобщённых координат и обобщённых сил. Мы сразу можем написать

$$q_1 = \theta,\quad q_2 = \varphi, \tag{3.7.23}$$

$$x = l\sin\theta\cos\varphi\,,\quad y = l\sin\sin\varphi\,,\quad z = l\cos\theta\,, \tag{3.7.24}$$

$$Q_1 = -mgl\sin\theta,\quad Q_2 = 0\,. \tag{3.7.25}$$

Так как система материальных точек, рассматриваемая в данной задаче, является натуральной, будем искать кинетическую энергию по формуле (3.3.17)

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\dot{q}_r\dot{q}_i\,. \tag{3.3.17}$$

Для определения коэффициентов a_{ri} воспользуемся формулой (3.1.7)*, из которой следует, что

$$a_{ri} = \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial y_j}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + \frac{\partial z_j}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right) \tag{3.7.26}$$

или

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right] = ml^2, \\ a_{12} = a_{21} &= m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\right] = 0, \\ a_{22} &= m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right] = ml^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}\right\} \tag{3.7.27}$$

Таким образом

$$T = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2\right). \tag{3.7.28}$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = ml^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Теперь с учётом (3.7.25) составим уравнения Лагранжа (3.2.1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_1, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

или

$$\ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l} \sin\theta = 0, \qquad \ddot{\varphi} = 0. \tag{3.7.29}$$

Задача 22.

Составить уравнение движения материальной точки относительно Земли, происходящего под действием силы притяжения Ньютона.

Запишем условие задачи кратко.

Найти	$f(q,\dot{q},t)$
Дано	$F=-G\dfrac{mM}{r^2}$

Решение задачи.

Свяжем ИСО с Землёй, поместив начало системы координат в центр Земли так, что ось вращения Земли будет совпадать с осью OZ, а сама система координат не будет участвовать во вращательном движении Земли. Движение по отношению к выбранной нами в данной задаче системе координат будем считать абсолютным. Сделаем чертёж.

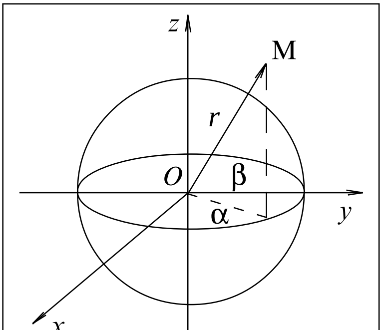

Рис. 14.

Положение материальной точки при движении относительно выбранной системы координат можно характеризовать с помощью трёх обобщённых координат: радиус-вектора r, долготы - α, и геоцентрической широты - β, то есть

$$q_1=r\,,\ q_2=\alpha\,,\qquad q_3=\beta\,. \tag{3.7.30}$$

Декартовы координаты материальной точки M будут

$$x=r\cos\beta\cos\alpha\,,\quad y=r\cos\beta\sin\alpha\,,\quad z=r\sin\beta\,. \tag{3.7.31}$$

Составим выражение для кинетической энергии

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right), \tag{3.7.32}$$

где m - масса материальной точки.

Если теперь в уравнении (3.7.32) перейти от декартовых координат к сферическим, в соответствии с (3.7.31), (продифференцировать (3.7.31) по времени, возвести в квадрат и сложить) получим

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2 + r^2\cos^2\beta\dot{\alpha}^2\right). \qquad (3.7.33)$$

Составим теперь выражение для потенциальной энергии материальной точки М. Потенциальная энергия материальной точки массы m на расстоянии r от Земли, определяется по формуле

$$V = -G\frac{mM}{r}, \qquad (3.7.34)$$

где M - масса Земли.

Если радиус Земли принять за R, то на поверхности Земли потенциальная энергия материальной точки будет

$$V_{З} = -G\frac{mM}{R}, \qquad (3.7.35)$$

а для силы притяжения можно написать

$$F_{Т} = -G\frac{mM}{R^2} = -mg. \qquad (3.7.36)$$

Из (3.7.36) следует, что $-GmM = -mgR^2$. Подставляя это значение в (3.7.34), окончательно получим

$$V = -\frac{mgR^2}{r} = -\frac{m\mu^2}{r}, \qquad (3.7.37)$$

где $\mu^2 = gR^2$.

Теперь мы можем составить функцию Лагранжа $L = T - V$.

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2 + r^2\cos^2\beta\dot{\alpha}^2\right) + \frac{m\mu^2}{r}. \qquad (3.7.38)$$

Составим производные от L:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\beta}^2 + mr\cos^2\beta\dot{\alpha}^2 - \frac{m\mu^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = mr^2 \cos^2 \beta \dot{\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = mr^2 \dot{\beta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = -mr^2 \sin\beta \cos\beta \dot{\alpha}^2.$$

Составим уравнения (3.4.5), а именно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \; i = 1,2,3. \tag{3.4.5}$$

$$\ddot{r} - r\left(\dot{\beta}^2 + \cos^2 \beta \dot{\alpha}^2\right) = -\frac{\mu^2}{r^2}, \tag{3.7.39}$$

$$mr^2 \cos^2 \beta \dot{\alpha} = c_1, \quad c_1 = const, \tag{3.7.40}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \dot{\beta}\right) + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\beta \dot{\alpha}^2 = 0. \tag{3.7.41}$$

Движение материальной точки M происходит под действием центральной силы, следовательно (см. §2.3.), момент количества движения материальной точки является постоянной величиной. Составим выражение для момента количества движения на оси x, y, z :

$$\left.\begin{aligned} M_x &= m(y\dot{z} - z\dot{y}) = mr^2\left(\dot{\beta}\sin\alpha - \dot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\right), \\ M_y &= m(z\dot{x} - x\dot{z}) = -mr^2\left(\dot{\beta}\cos\alpha + \dot{\alpha}\sin\alpha\sin\beta\cos\beta\right), \\ M_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2 \cos^2 \beta\dot{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{3.7.42}$$

Отсюда видно, что уравнение (3.7.40) выражает постоянство момента количества движения материальной точки относительно оси OZ.

Модуль момента количества движения материальной точки будет равен

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = mr^2\sqrt{\dot{\beta}^2 + \cos^2 \beta \dot{\alpha}^2} = c_2, \tag{3.7.43}$$

где $c_2 = const$.

Известно, что движение под действием центральной силы происходит в плоскости, перпендикулярной к вектору момента количества движения. Это движение происходит в плоскости, проходящей через центр шара. Линию ОК пересечения этой плоскости с экваториальной плоскостью называют линией узлов (рис.14.). Обозначим через Ω угол

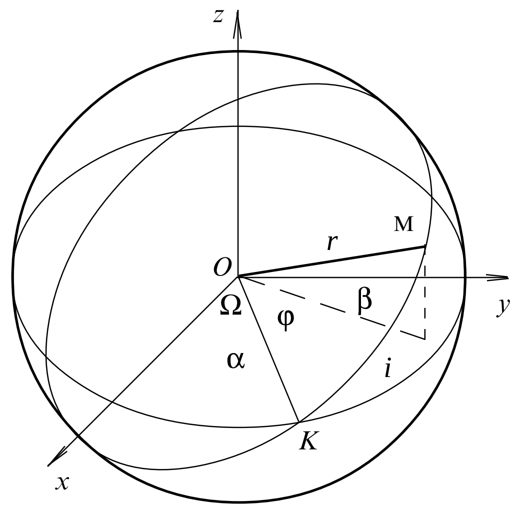

Рис. 15.

между линией узлов и осью X, через i - угол между экваториальной плоскостью и плоскостью движения материальной точки М. В плоскости движения положение материальной точки определяется радиусом r и углом φ. В полярных координатах r и φ момент количества движения материальной точки выражается формулой

$$M = mr^2\dot{\varphi} = c_2 . \tag{3.7.44}$$

Сравнивая (3.7.44) с (3.7.43) получим

$$\dot{\beta}^2 + \cos^2\beta\dot{\alpha}^2 = \dot{\varphi}^2 . \tag{3.7.45}$$

Уравнение (3.7.40) будет иметь вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu^2}{r^2} . \tag{3.7.46}$$

С помощью замены переменной

$$u = \frac{1}{r} \tag{3.7.47}$$

и соотношения

$$r^2 \dot{\varphi} = \frac{c_2}{m} = c \tag{3.7.48 }$$

уравнение (3.7.46) можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}, \tag{3.7.49}$$

где

$$p = \frac{c^2}{\mu^2}. \tag{3.7.50}$$

Решением уравнения (3.7.49) будет

$$u = a\cos(\varphi + E) + \frac{1}{p}, \tag{3.7.51}$$

где a и E - постоянные интегрирования. Учитывая (3.7.47), получим

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + E)}, \tag{3.7.52}$$

где

$$e = ap. \tag{3.7.53}$$

Уравнение (3.7.52) представляет собой уравнение конического сечения, то есть, траектория движения материальной точки под действием силы притяжения Ньютона в зависимости от значений эксцентриситета e будет представлять эллипс, параболу или гиперболу.